Kdo du 11/10/2024

Intégrales & réduction

1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. Soit une fonction $f \in E$. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale
$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\, dt$$
est absolument convergente.
3. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bornée.
4. Soit une fonction $f \in E$. Justifier que, tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\, du$.
5. Est-il vrai que, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(f)(x) = 0$?
6. Soit une fonction $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.
7. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.
8. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = 0$.
9. L'endomorphisme Φ est-il injectif ? surjectif ?
10. Déterminer toutes les fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f) = f$.
11. Déterminer le spectre de Φ.
12. Prouver que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale $K_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}\, dt$ est convergente et la calculer.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice $M = (m_{ij})$ de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
14. Cette matrice M est-elle inversible ?

---

1. L'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue et bornée et car toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. En effet : si $\exists (M, N) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} |f(x)| \le M \\ |g(x)| \le N \end{cases}$, alors
$\forall x \in \mathbb{R},\ |\alpha f(x) + \beta g(x)| \le |\alpha||f(x)| + |\beta||g(x)| \le |\alpha|M + |\beta|N.$

2. Si une fonction f appartient à E, alors elle est bornée, d'où $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq M$.
D'où $|\mathrm{e}^{-t} f(x+t)| \leq M\mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \geq 0$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente, d'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-t} f(x+t)|\,dt$ converge aussi.
Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\,dt \text{ est absolument convergente.}}$

3. D'après l'inégalité triangulaire,
$$|\Phi(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t)\,dt\right| \leq \int_0^{\infty} |\mathrm{e}^{-t} f(x+t)|\,dt \leq \int_0^{\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,dt = M$$
pour tout réel x. Donc $\boxed{\text{la fonction } \Phi(f) \text{ est bornée.}}$

4. On effectue le changement de variable $u = x + t$. La fonction $t \mapsto x + t$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante, d'où : $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u-x)} f(u)\,du = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du$.

5. Soit $\varepsilon > 0$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors il existe $X \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq X,\ |f(x)| \leq \varepsilon$. D'où :
$\forall x \geq X,\ |\Phi(f)(x)| = \left|\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du\right| \leq \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-u} f(u)\right|\,du$ d'après l'inégalité triangulaire. D'où $|\Phi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\varepsilon\,du \leq \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}\varepsilon$. On a montré que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = 0}$.

6. On déduit de la question (4) que
$$\Phi(f)(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(\int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du - \int_7^{x} \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du\right) = \mathrm{e}^x \cdot \left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right),$$
en notant $G : x \mapsto \displaystyle\int_7^x \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du$ une primitive de la fonction continue $u \mapsto \mathrm{e}^{-u} f(u)$. Par suite, la fonction $\Phi(f)$ est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)'(x) = \mathrm{e}^x \left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right) + \mathrm{e}^x \left(0 - G'(x)\right) = \Phi(f)(x) - f(x)$$
car $G'(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$. Donc $\boxed{\Phi(f)' = \Phi(f) - f.}$

7. D'une part, l'application Φ est linéaire ; d'autre part, $\Phi(f)$ appartient à E pour tout $f \in E$. En effet, $\Phi(f)$ est continue car dérivable d'après (6). Et $\Phi(f)$ est bornée d'après (3).
Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

8. Analyse : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f)$ est nulle, alors elle est constante et sa dérivée $\Phi(f)'$ est donc nulle. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$ d'après (4). Donc $f = 0$.
Synthèse : Si $f = 0$, alors $\Phi(f) = 0$.
Conclusion : $\Phi(f) = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

9. De la question précédente, il résulte que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_E\}$. D'où l'application linéaire $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$. Mais $\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective}}$ car la fonction $x \mapsto x$ si $x \in [0,1],\ 2 - x$ si $x \in [1,2],\ 0$ sinon est continue et bornée, et appartient donc à E. Mais n'est pas dérivable et n'appartient donc pas $\operatorname{Im}\Phi$ d'après la question (6).

10. Analyse : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f) = f$, alors $\Phi(f)' = f'$. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$ d'après (4). D'où $f' = 0$. Donc la fonction f est constante
Synthèse : Si f est constante, alors $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = K$. D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} K\mathrm{e}^{-t}\,dt = K$. Donc $\Phi(f) = f$.
Conclusion : $\Phi(f) = f$ si, et seulement si, la fonction f est constante.

11. Rappelons qu'un réel λ est une valeur propre de Φ si, et seulement si, il existe $f \in E$ tel que $f \neq 0$ et $\Phi(f) = \lambda f$. Des deux questions précédentes, il résulte que 0 n'est pas une valeur propre et que 1 en est une. Soit maintenant un réel $\lambda \notin \{0;1\}$. Si $\Phi(f) = \lambda f$, alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et, d'après (4), $\lambda f' = (\lambda - 1)f$, d'où $f' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} f$ car $\lambda \neq 0$. On résout cette équation différentielle : $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K\mathrm{e}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$. Or $\lambda \neq 1$, donc : ou bien $K = 0$ (et alors $f = 0$), ou bien f n'est pas bornée (et alors $f \notin E$). Dans les deux cas, λ n'est pas une valeur propre. Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi) = \{1\}}$.

12. L'intégrale $K_i = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est impropre en $+\infty$. Elle est convergente car la fonction $t \mapsto t^i\mathrm{e}^{-t}$ est continue et $t^i\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$.
On montre par récurrence sur i que $K_i = i!$:
   - $K_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
   - Supposons que $K_i = i!$ pour un entier $i \in \mathbb{N}$ et intégrons par partie : $K_{i+1} = \int_0^{+\infty} uv'$ et les fonctions $u\ :\ t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $v\ :\ t \mapsto t^{i+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $K_{i+1} = [-t^{i+1}\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (i+1)t^i\mathrm{e}^{-t}\,dt = (i+1)K_i$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{i+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées.
   D'où $K_{i+1} = (i+1)\cdot i! = (i+1)!$.
   - Donc $\boxed{K_i = i! \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}}$.

13. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$: pour tout $t \in [0, +\infty[$, $(x+t)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} t^{j-i}x^i$.

L'intégrale $L_j(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x+t)^j\,dt$ est convergente car c'est la combinaison linéaire $L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^i K_{j-i}$ des $j+1$ intégrales convergentes K_i. Or $K_{j-i} = (j-i)!$ et $\dbinom{j}{i} = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$. Donc $\boxed{L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} x^i}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, d'où $\varphi(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}P(x+t)\,dt$ est une intégrale convergente car c'est la combinaison linéaire $\varphi(P)(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x)$ des $n+1$ intégrales convergentes $L_j(x)$. De plus, $\varphi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n car c'est la combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j L_j$ des polynômes L_j de degrés $j \leq n$. Enfin, φ est une application linéaire car $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$ pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de l'intégrale. Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$ et sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \cdots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 0 & 1 & & n!/2 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (m_{ij})_{0\leq i,j\leq n}\,, \quad \text{où } m_{ij} = \frac{j!}{i!} \text{ si } i \leq j \text{ et est nul sinon}$$

car $L_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} X^i$.

14. Le déterminant de la matrice triangulaire M vaut 1, il est donc non nul. On en déduit que la matrice M est inversible.