Colle n$^{\text{o}}$ 05

Intégrales & structures

Exercice 1. Soit l'intervalle $I =]-1, +1[$. Pour chaque $(x, y) \in I^2$, on définit le réel

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in I^2,\ x * y \in I$.
2. Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
3. Soit $a \in [0, 1[$. Vérifier que $A = [a, 1[$ est stable par la loi $*$.
   L'ensemble $(A, *)$ est-il un sous-groupe de $(I, *)$?
4. Montrer que la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to I$ est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque th^{-1}.
5. Montrer que th est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(I, *)$.

Exercice 2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge.
2. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Démontrer que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$
3. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 3 (Nombre de diviseurs d'un entier – oral X ENS PSI 2011)**.**

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i | j$ et zéro sinon.

1. Montrer que $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.
2. Soit s_n la somme des n^2 éléments de la matrice A_n. Déterminer un équivalent de s_n.
3. Soit d_n le nombre des diviseurs de n. Montrer que $d_1 + \cdots + d_n \sim n \ln n$.