Exercice 1 - Opérateur Δ $(\star\star)$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ telle que $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et déterminer son image et son noyau.

De façon immédiate f est linéaire. De plus on remarque que $f\left(X^k\right) = kX^{k-1} + \cdots + 1$ en particulier $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$. On en déduit alors que $\ker(f) = \mathbb{R}_0\left[X\right]$.

D'après ce qui précède l'espace $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ est stable par f, dès lors on note f_n l'endomorphisme induit, et avec ce qui précède on a $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}\left[X\right]$ car la famille $\left(f_n(X), \ldots, f_n(X^n)\right)$ est échelonnée en degré et contenue dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est donc une base. Ainsi pour $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe n tel que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc f est subjective.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \left(\Delta(P), P(0)\right) \end{array}$$

Il s'agit de façon évidente d'une application linéaire et de plus elle est injective car $P \in \ker(\varphi)$ implique $P \in \ker(\Delta)$ d'où P est constant et de plus $P(0) = 0$ d'où le résultat. Enfin par surjectivité de Δ on en déduit le résultat voulu.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

D'après la question précédente il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. On cherche donc P sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX$, il vient :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) = X^2 &\iff a\left(X+1\right)^3 + b\left(X+1\right)^2 + x\left(X+1\right) - aX^3 - bX^2 - c = X^2 \\ &\iff 3aX^2 + \left(3a+2b\right)X + a + b + c = X^2 \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccc} 3a & = & 1 \\ 3a+2b & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

En résolvant ce système on trouve $P(X) = \frac{1}{6}X\left(X-1\right)\left(2X-1\right)$, et par suite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} P(k+1) - P(k) \\ P(n+1) \\ \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 2 - Un endomorphisme $(\star\star)$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijective et exprimé f^{-1}.

D'après la relation vérifiée par f on a :

$$f \circ \left[\frac{1}{2}\left(f - Id\right)\right] = Id = \left[\frac{1}{2}\left(f - Id\right)\right] \circ f$$

On en déduit alors que f est bijective et de plus on a $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - Id)$.

2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.

La situation semble parfaitement adaptée pour utiliser le lemme des noyaux, en effet on remarque que $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ comme il s'agit d'un polynôme annulateur de f, on obtient par le lemme des noyaux la relation :

$$\ker(P(f)) = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$$

Finalement comme P est annulateur on en conclut que $\ker(P(f)) = E$ d'où le résultat.

Sinon on peux procéder par analyse/synthèse :
Pour $x \in E$ on suppose que $x = a + b$ avec $a \in \ker(f + Id)$ et $b \in \ker(f - 2Id)$, on a alors :

$$f(a) = -a \qquad f(b) = 2b$$

Dès lors par linéarité de f on trouve $f(x) = -a + 2b$, ce qui nous amène à poser $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.
Réciproquement, pour $x \in E$ on pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$. On a bien $x = a + b$ et de plus :

$$\begin{aligned}
(f + Id)(a) &= \frac{1}{3}\Big[2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\Big] \\
&= \frac{-1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - x\right) \\
&= \frac{-1}{3}\left(f^2 - f + Id\right)(x) = 0
\end{aligned}$$

De même on montre que $(f - 2Id)(b) = 0$ on en conclut alors la somme directe demandé.

3. On suppose ici que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f + Id)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x) + x$ dès lors on a :

$$\begin{aligned}
(f - 2Id)(y) &= f(y) - 2y \\
&= f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x \\
&= f^2(x) - f(x) - 2x \\
&= \left(f^2 - f - 2Id\right)(x) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f + Id) \subset \ker(f - 2Id)$, pour conclure de l'égalité, on utilise le théorème du rang (doù le besoin de se placer en dimension finie), pour obtenir :

$$\dim \mathrm{Im}(f + Id) = \dim E - \dim \ker(f + Id) = \dim \ker(f - 2Id)$$

D'où l'égalité.

Exercice 3 - Avec des logarithmes (⋆⋆)

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{4}}}$.

Remarquons d'abord que $x \mapsto \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{4}}}$ est continue sur $]0,1]$, puisque l'on veut montrer que l'intégrale est convergente il suffit de trouver $\alpha < 1$ tel que $\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{4}}}$ soit un $o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$. Mais par croissance comparée :

$$x^\alpha \frac{\ln x}{x^{3/4}} = x^{\alpha - 3/4} \ln x \to 0$$

Dès que $\alpha > \frac{3}{4}$, on choisit donc $\alpha \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$, ce qui assure la convergence.

2. Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)$. En déduire la nature de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} dx$$

La fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et de plus on a pour $x \in [1,+\infty[$:

$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

D'où $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc par produit $\frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$. Par critère de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ converge, et de plus $\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ étant de signe constant en $+\infty$ par théorème de comparaison on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} dx$ converge.

3. Donner un équivalent au voisinage de 0 de $\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)$. En déduire la nature de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} dx$$

La fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$ et de plus on a pour $x \in]0,1]$:

$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Ici il faut faire très attention car en 0 la quantité $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$, c'est donc le terme qu'il faut mettre en facteur :

$$\begin{aligned}
\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \ln\left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln x + \sqrt{x} + o(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\ln x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\ln x}{2x^{3/4}}.$$

D'après la première question, $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{2x^{3/4}} dx$ converge et de plus $\frac{-\ln x}{2x^{3/4}}$ est de signe constant au voisinage de 0 par théorème de comparaison on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{\frac{3}{4}}} dx$ converge.

Exercice 4 - Comparaison impossible $(\star\star)$

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

On procède à l'aide d'une IPP, soit donc $a \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= -\frac{\cos a}{\sqrt{a}} + \cos 1 + \int_1^a \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx\end{aligned}$$

Or par critère de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est absolument convergente et de plus $\frac{\cos a}{\sqrt{a}}$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$ d'où le résultat.

2. Montrer que $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

En formant le quotient on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sin x} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sin x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

Le sinus étant borné, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ainsi on a bien l'équivalence.

3. Montrer que l'on a

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

On a pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}).\end{aligned}$$

4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$. Conclure.

D'après la question 1., $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge. Par critère de Riemann le terme en $O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge également. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

On remarque alors que pour $x \geq 1$ on a $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ donc :

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{x}$$

On peut montrer par une IPP que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx$ est convergente (il s'agit d'une intégrale de Dirichlet), mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ est divergente. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge et donc de même $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$ diverge.

D'après la question 1. l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est convergente et d'après la question 4. l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$ est divergente alors que d'après la question 2. on a $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. On ne peut effectuer la comparaison car au voisinage de $+\infty$ les deux quantités précédentes ne sont pas de signes constants.

Exercice 5 - Changements de variables (⋆)

1. Montrer que pour $a > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$ est convergente.

Tout d'abord la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{a}$$

Or la fonction ln est intégrable en 0. De même on remarque que :

$$t^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}\left(\frac{a^2}{t^2} + 1\right)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit alors que $\displaystyle\frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$, ce qui assure la convergence en $+\infty$.

2. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$.

Soient $B \geq A > 0$ on effectue le changement de variable sur $[A, B]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt &= \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{B}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\
&= \int_{\frac{1}{B}}^{\frac{1}{A}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2 + 1} du \\
&= -\int_{\frac{1}{B}}^{\frac{1}{A}} \frac{\ln(u)}{u^2 + 1} du
\end{aligned}$$

Comme on a montrer la converge à la première question, on en déduit par passage à la limite que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$$

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a+t^2} dt$.

On effectue le changement de variable $t = au$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2+a^2u^2} adu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)}{a(1+u^2)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a(1+u^2)} du \\ &= \frac{\ln(a)}{a} \times [\arctan(u)]_0^{+\infty} + \frac{1}{a} \times 0 \\ &= \frac{\pi \ln(a)}{2a} \end{aligned}$$

Exercice 6 - Calcul d'intégrale (⋆⋆)

Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$$

Tout d'abord en 0 la fonction $x \mapsto \frac{\arctan(2x)-\arctan(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1, en particulier l'intégrale converge en 0. Pour la borne infinie, on va donner une méthode permettant de montrer la convergence et de la calculer directement.

On commence par fixer $A \in \mathbb{R}_+$, puis l'on remarque que par changement de variable $u = 2x$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx &= \int_0^A \frac{\arctan(2x)}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \\ &= \int_0^{2A} \frac{2\arctan(u)}{u} \frac{1}{2} du - \int_0^A \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \\ &= \int_0^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx - \int_0^A \frac{\arctan(x)}{x} dx \\ &= \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que les deux intégrales à droite dans la première équation converge bien en 0 car les fonctions dans les intégrales sont prolongeable par continuité.

De plus la fonction arctan est une fonction croissante, en particulier on en déduit :

$$\arctan(A)\ln(2) = \int_A^{2A} \frac{\arctan(A)}{x} dx \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan(x)}{x} dx \leq \int_A^{2A} \frac{\arctan(2A)}{x} dx = \arctan(2A)\ln(2)$$

Or les deux membres de droite et de gauche admettent une limite commune égale à $\frac{\pi}{2}\ln(2)$, on conclut finalement par théorème d'encadrement. Autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ln(2)$$