Corrigé de la colle n° 04

Algèbre linéaire & intégrales

12 octobre 2024

Exercice 1. 1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices antisymétriques et celui $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quelles sont leurs dimensions ?

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A, une unique matrice symétrique S et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(S) = 0.$$

3. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

---

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ est antisymétrique car $A^T = -A$ et la matrice $S' = \frac{1}{2}(M + M^T)$ est symétrique car $S'^T = S'$. De plus, $A + S'$ est égal à M. La décomposition $M = A + S'$ est unique car : si $A_1 + S'_1 = A_2 + S'_2$, alors $A_1 - A_2 = S'_1 - S'_2$. Cette matrice est à la fois symétrique et anstisymétrique, d'où elle est nullle, donc $A_1 = A_2$ et $S'_1 = S'_2$.
   L'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices de taille $n \times n$ antisymétriques est un *sev* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques est aussi un *sev*. L'existence de la décomposition $M = A + S'$ montre que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n + \mathscr{S}_n$. De l'unicité, on déduit que la somme est directe : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n \oplus \mathscr{S}_n$.
   La dimension de $\mathscr{A}_n$ est $\frac{n(n-1)}{2}$ car $(E_{ij} - E_{ji})_{j>i}$ est une base de $\mathscr{A}_n$.
   Et la dimension de $\mathscr{S}_n$ est $\frac{n(n+1)}{2}$ car $(E_{ij} + E_{ji})_{j>i} \cup (E_{ii})_i$ est une base de $\mathscr{S}_n$.
2. Existence : Posons maintenant $c = \frac{\mathrm{tr}(S')}{n}$ et $S = S' - cI_n$. On a alors : $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S') - \mathrm{tr}(cI_n) = 0$.
   Enfin $A + S + cI_n = A + S' = M$.
   Unicité : La décomposition $S' = S + cI_n$ est unique car elle implique que $\mathrm{tr}\, S' = \mathrm{tr}\, S + \mathrm{tr}(cI_n)$, d'où $c = \frac{\mathrm{tr}(S')}{n}$, donc c est unique.
3. L'ensemble $\mathscr{S}_n \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ des matrices symétriques de trace nulle est un *sev* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection de deux *sev*. Et $\mathrm{Vect}(I_n)$ est aussi un *sev*. De l'existence et de l'unicité de la décomposition $M = A + S + cI_n$, on tire que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n \oplus (\mathscr{S}_n \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 2. 1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ converge.

2. Montrer que

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos^2\theta}.$$

3. Par le changement de variables $u = \tan\theta$, déterminer la valeur de I.

---

1. L'intégrale I est impropre en -1 et en $+1$. converge si, et seulement si, les deux intégrales
$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{0}^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$
convergent.
• Commençons par l'intégrale I_2, impropre en $+1$: $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ car $\frac{1}{2-x^2} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ne change pas de signe et $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ converge d'après le critère de Riemann décalé en 1.
D'où l'intégrale I_2 converge.
AUTRE MÉTHODE : $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ converge car : pour tout $y \in [0,1[$, $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = [\text{Arcsin}x]_0^y = \text{Arcsin}y \underset{y\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. D'où l'intétgrale I_2 converge.
• Et, de même, l'intégrale I_1 est convergente.
• Finalement, l'intégrale I converge.
2. Le changement de variable $x = \sin\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $dx = \cos\theta\, d\theta$, $2 - x^2 = 1 + \cos^2\theta$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos\theta| = \cos\theta$ car $\cos\theta$ est positif sur l'intervalle d'intégration. Donc
$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1+\cos^2\theta)\cos\theta} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}.$$
3. Le changement de variable $u = \tan\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $du = (1+\tan^2\theta)\, d\theta = (1+u^2)\, d\theta$, $\frac{1}{1+\cos^2\theta} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}}$, d'où $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}\, du$.
Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(u/\sqrt{2})^2}\, du = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(u/\sqrt{2})\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.
1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini pour tout $x \geq 0$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction F sur $[0,+\infty[$?
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1}$ converge et la calculer.
4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.
5. À l'aide du changement de variable $t = xu$, étudier la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

---

1. Pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[$, $1 + x^3 + t^3$ est différent de 0 car supérieur à 1. L'intégrale $F(x)$ est donc impropre en $+\infty$. Or $\frac{1}{1+x^3+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ qui ne change pas de signe. Et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$. Donc l'intégrale $F(x)$ converge, autrement dit : le réel $F(x)$ est défini.
2. Soit $x \geq y \geq 0$. Alors, pour tout $t \geq 0$, $1 + x^3 + t^3 \geq 1 + y^3 + t^3 > 0$, d'où $\frac{1}{1+x^3+t^3} \leq \frac{1}{1+y^3+t^3}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc $F(x) \leq F(y)$ par croissance de l'intégrale. La fonction F est donc décroissante.
3. Pour tout $t \geq 0$, $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1+u^2\right)$ en posant $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone et $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$, d'où :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\, dt = \frac{4}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}(u)\right]_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$
4. Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, d'où
$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}\, dt = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+u^3}\frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^3}\, du.$$
Au dénominateur, $1 + u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$ et, au numérateur, $u = 1 + u - 1$, d'où $\frac{u}{1+u^3} = \frac{1}{1-u+u^2} - \frac{1}{1+u^3}$. D'où $F(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - F(0)$ d'après la question précédente. Donc $F(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
5. Soit x strictement positif : le changement de variable $t = xu$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, d'où
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{1+x^3+x^3u^3} = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{1}{x^3}+1+u^3} \leq \frac{1}{x^2}F(0).$$
D'où $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x^2}F(0)$. Donc $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes.