Chapitre V Suites de fonctions

Table des matières

V.1 Deux manières de converger

DÉFINITION 1
Soit T une partie de $\mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : T \to \mathbb{R}$. Soit une fonction $f : T \to \mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions f_n :

1. **converge simplement** sur T vers f si $\quad \forall t \in T, \quad |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
2. **converge uniformément** sur T vers f si $\quad \sup_{t\in T} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si une suite de fonctions f_n converge uniformément sur T vers f, alors f_n converge simplement sur T vers la même fonction f ; mais la réciproque est fausse :

$$\textbf{convergence uniforme} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \textbf{convergence simple}$$

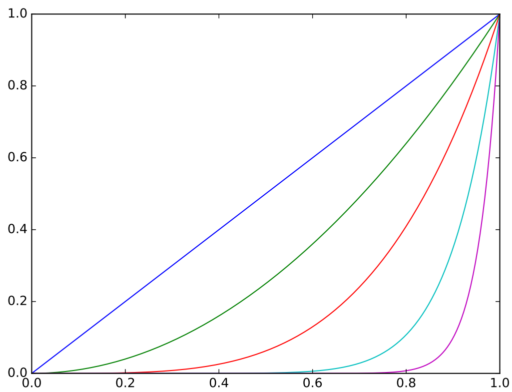


FIGURE V.1 – LA SUITE DES FONCTIONS $(t^n)_{n\in\{1,2,4,10,22\}}$

EXERCICE 2 — *Montrer que la suite des fonctions $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0,1]$. Montrer (de deux manières) que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$. Mais qu'elle est uniforme sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $[0,1[$.*

REMARQUE 3 (Le dire avec des « epsilon ») —

1. *f_n converge simplement sur T vers f si, et seulement si :*

$$\forall t \in T, \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon\ .$$

Ici, N dépend de t et de ε.

2. *f_n converge uniformément sur T vers f si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N, \quad \forall t \in T,\ |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon\ .$$

Ici, N dépend de ε mais pas de t : le même N est valable pour tous les $t \in T$.

EXERCICE 4 — *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et g_n définies sur $[0, 1]$ et représentées ci-dessous :*

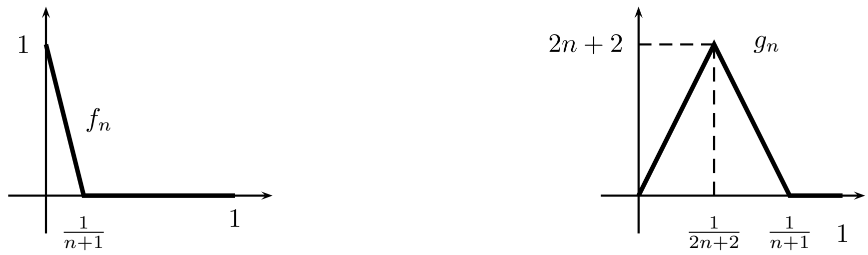


FIGURE V.2 – DEUX SUITES DE FONCTIONS

La suite de fonctions f_n converge-t-elle sur $[0, 1]$ simplement ? uniformément ? Si oui, vers quelle fonction ?

Mêmes questions pour la suite de fonctions g_n.

V.2 CONTINUITÉ

Une suite de fonctions f_n qui sont toutes continues peut converger simplement vers une fonction f non continue.

EXEMPLE 5 — *Dans l'exercice 2, chaque fonction $f_n : t \mapsto t^n$ est continue sur $[0, 1]$ mais la limite f n'est pas continue sur $[0, 1]$ (car elle n'est pas continue en 1).*

La convergence simple a donc un défaut : elle ne conserve pas toujours la continuité. La convergence uniforme n'a pas ce défaut.

THÉORÈME 6
Soient T un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in T$. Si une suite de fonctions f_n continues en a converge uniformément sur T vers une fonction f, alors f est aussi continue en a.

Preuve — On veut montrer que f est continue en a, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in T, \quad |t - a| \leq \delta \implies |f(t) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Or $|f(t) - f(a)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$.

Soit $\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \forall t \in T,\ |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ car la convergence de f_n vers f est uniforme.

On choisit un n tel que $n > N$: $\exists \delta > 0,\ \forall t \in T, \quad |t - a| \leq \delta \implies |f_n(t) - f_n(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ car f_n est continue.

D'où : $\forall t \in T, \quad |t - a| \leq \delta \implies |f(t) - f(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon$. Donc f est continue en a. □

Par définition, une fonction f est continue sur T si f est continue en chaque point $a \in T$. D'où le

COROLLAIRE 7
Soit T un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une suite de fonctions f_n continues sur T converge uniformément sur T vers une fonction f, alors f est aussi continue sur T.

MÉTHODE 8 (Stratégie de la barrière) —

1. *La continuité (la dérivabilité aussi) est une propriété locale. Pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle T, il suffit donc de montrer qu'elle est continue sur tout segment inclus dans T.*
2. *Mais la convergence uniforme est une propriété globale. La convergence uniforme sur tout segment inclus dans un intervalle n'implique pas la convergence uniforme sur l'intervalle (voir l'exercice 2).*
3. *On peut donc raisonner comme ceci :*

$$\text{cv uniforme avec barrière} \implies \text{continuité avec barrière} \implies \text{continuité sans barrière}$$

Mais on ne peut pas raisonner comme cela :

$$\text{« cv uniforme avec barrière} \overset{Grrrr}{\implies} \text{cv uniforme sans barrière} \implies \text{continuité sans barrière »}$$

Le théorème 6 est un cas particulier d'un théorème plus général (que nous admettrons) :

THÉORÈME 9 (**d'interversion des limites**, aussi appelé théorème **de la double limite**)
Soient une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle T et a une extrémité (éventuellement infinie) de cet intervalle. Si la suite de fonctions f_n converge uniformément sur T vers une fonction f et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la suite de réels b_n converge vers un réel b et $\lim_{t\to a} f(t) = b$:

$$\lim_{t\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to a} f_n(t).$$

V.3 INTÉGRER

L'objectif des théorèmes suivants est d'intervertir limite $\lim_{n\to\infty}$ et intégrale $\int$, autrement dit de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int = \int\lim_{n\to\infty}.$$

THÉORÈME 10
Si une suite de fonctions f_n, continues sur un segment $[a,b]$, converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors f est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Mieux : la suite des primitives

$$F_n\ :\ [a,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\int_a^x f_n(t)\,dt$$

converge uniformément sur $[a,b]$ vers la primitive

$$F\ :\ [a,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt.$$

Preuve — La fonction f est continue sur $[a,b]$ d'après le théorème 6. On peut donc intégrer f.

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \le (b-a)\cdot M_n,\ \text{où } M_n = \sup_{[a,b]}|f_n-f|.$$

Or f_n converge uniformément vers f, d'où $\sup\limits_{[a,b]} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mieux : Pour tout $x \in [a,b]$, $|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq (b-a)\cdot M_n$, d'où $\sup\limits_{[a,b]} |F_n - F| \leq (b-a)\cdot M_n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. □

Le théorème 10 fait deux hypothèses qui ne sont pas très pratiques :

— on intègre sur un segment $[a,b]$ (et pas sur un intervalle quelconque) ;

— la suite f_n converge uniformément.

Le théorème suivant, que nous admettons, est plus pratique car ses hypothèses sont moins fortes.

Théorème 11 **(de la convergence dominée)**
Soit un intervalle T et une suite de fonctions f_n continues par morceaux sur T. Si :

1. la suite de fonctions f_n converge simplement sur T vers une fonction f continue par morceaux ;
2. il existe une fonction φ continue par morceaux sur T et intégrable sur T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in T, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \ ;$$

alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables et la suite de réels $\displaystyle\int_T f_n$ converge vers le réel $\displaystyle\int_T f$.

Exercice 12 — *Montrer que la suite de réels* $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t/n}}{1+t^2}\,dt$ *est bien définie, qu'elle converge et déterminer sa limite.*

Méthode 13 (Du discret au continu) — *Le théorème de la convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale :*

$$\int_T \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n(t)\,dt$$

grâce à une hypothèse de domination : de $|f_n(t)|$ *par* $\varphi(t)$*, indépendamment de l'indice entier* n*. Dans l'exercice suivant, on va intervertir limite et intégrale :*

$$\lim_{x\to a} \int_T f(x,t)\,dt = \int_T \lim_{x\to a} f(x,t)\,dt$$

grâce à une hypothèse de domination : de $|f(x,t)|$ *par* $\varphi(t)$*, indépendamment d'un paramètre réel* x*.*

Pour passer du discret (l'indice entier n*) au continu (le paramètre réel* x*), on se rappelle d'abord la* ***caractérisation séquentielle de la limite*** *d'une fonction* g *:*

$g(x)$ tend vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite u_n tend vers a, la suite $g(u_n)$ tend vers ℓ.

Exercice 14 — *Étudier* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt$.

V.4 Dériver

L'objectif du théorème suivant est d'intervertir limite $\lim\limits_{n\to\infty}$ et dérivée $\frac{d}{dx}$, autrement dit de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} .$$

THÉORÈME 15
Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Si :

(i) la suite des fonctions f_n converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f ;

(ii) la suite des dérivées f_n' converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g ;

alors

1. la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ f'(x) = g(x)$;
2. la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f ;

Preuve — Soit $c \in [a,b]$. La fonction dérivée f_n' est continue (car f_n est $\mathcal{C}^1$), d'où $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt$ pour tout $x \in [a,b]$. On passe à la limite $n \to \infty$: $f_n(c) \to \ell \in \mathbb{R}$ car (i) et $\int_c^x f_n'(t)\,dt \to \int_c^x g(t)\,dt$ car (ii) et le théorème 10. D'où $f_n(x) \to \ell + \int_c^x g(t)\,dt$. Donc la suite f_n converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction $f : x \mapsto \ell + \int_c^x g(t)\,dt$.

Cette fonction f est dérivable car la fonction g est continue (car (ii) et le théorème 6). Et $f' = g$. Reste à montrer que (f_n) converge uniformément :

$$\begin{aligned}
f_n(x) - f(x) &= \int_c^x \left[f_n'(t) - g(t)\right]\,dt + [f_n(c) - \ell]\,, \quad \text{d'où} \\
|f_n(x) - f(x)| &\leq \int_c^x \left|f_n'(t) - g(t)\right|\,dt + |f_n(c) - \ell| \\
&\leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n' - g| + |f_n(c) - \ell|\,, \quad \text{pour tout } x \in [a,b], \text{ d'où} \\
\sup_{[a,b]}|f_n - f| &\leq \underbrace{(b-a)\sup_{[a,b]}|f_n' - g|}_{\to 0 \text{ car } (ii)} + \underbrace{|f_n(c) - \ell|}_{\to 0 \text{ car } (i)}.
\end{aligned}$$

□

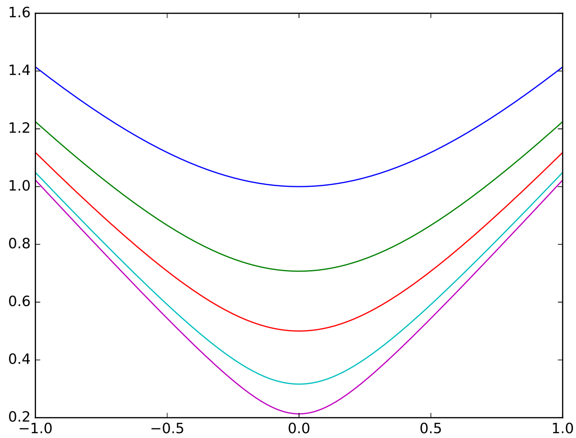


FIGURE V.3 – LA SUITE DES FONCTIONS $\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right)_{n \in \{1,2,4,10,22\}}$

EXERCICE 16 — *Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [-1,+1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.*

1. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement. Vers quelle fonction f ?*
2. *La convergence est-elle uniforme ?*
3. *Les fonctions f_n sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$? Et la fonction f ? Que dit le théorème précédent ?*

MÉTHODE 17 —

1. *Pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

2. *Soit $k \geq 1$. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I autre qu'un segment, il suffit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.*
3. *Si on veut montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors on peut utiliser le corollaire suivant (qui se démontre par récurrence en utilisant le théorème 15).*

> Corollaire 18
> Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si :
>
> (i) pour chaque $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite des fonctions $f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
>
> (ii) la suite des fonctions $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;
>
> alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in I,\ f_n^{(j)}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{(j)}(x)$.

V.5 Approximation uniforme par des polynômes

Remarque 19 —

1. *Se rappeler que, par définition, une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$, c'est-à-dire*

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_a > 0, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

*et qu'elle est **uniformément continue** sur I si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in I,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

2. *Se rappeler que continuité uniforme $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ continuité :*

Exercice 20 — *Montrer que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Et que la réciproque est néanmoins vraie si I est un segment :

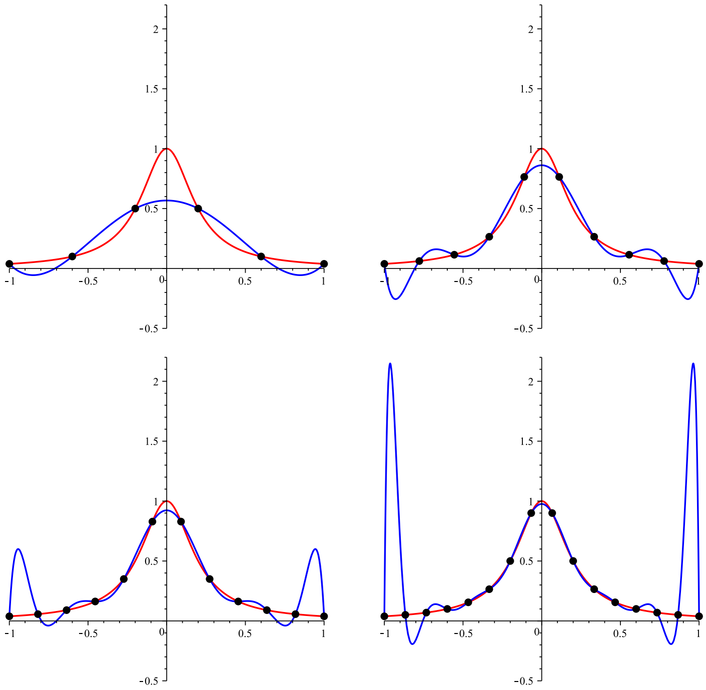
> Théorème 21 (de Heine)
> Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

3. *L'interpolation n'est pas toujours une bonne approximation.*

Exemple 22 (Le phénomène de Runge) — *La figure ci-dessous représente la fonction*

$$f : [-1,+1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$$

et ses polynômes L_n d'interpolation de Lagrange aux $n+1 = 6,\ 10,\ 12$ et 16 nœuds équidistants dans l'intervalle $[-1,+1]$. On y observe que le polynôme d'interpolation oscille aux bords de l'intervalle et on peut montrer que $\sup\limits_{[-1,+1]} |f - L_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

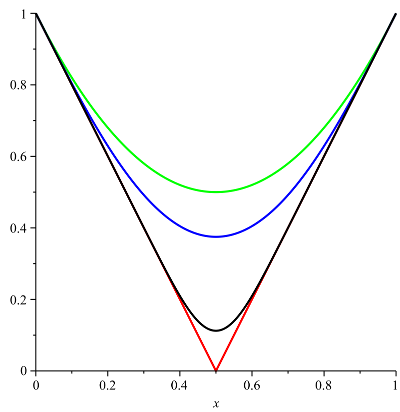


LE PHÉNOMÈNE DE RUNGE

THÉORÈME 23 (de Weierstrass)
Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f :

$$\sup_{[a,b]} |f - P_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve — On commence par constater que la fonction f est uniformément continue d'après le théorème de Heine car elle est continue sur un segment : le segment $[a,b]$. Puis on construit une suite de polynômes de Bernstein... dont on montre qu'elle converge uniformément vers la fonction f... □



LES POLYNÔMES DE BERNSTEIN DE DEGRÉS 2, 10 ET 50 QUI APPROXIMENT LA VALEUR ABSOLUE $[0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |2x-1|$

EXERCICE 24 (théorème des moments) —

Soit une fonction f continue d'un segment $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, alors la fonction f est nulle.