Matrices

1 Calul matriciel élémentaire

Exercice 1. ♡* Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Vérfier que le produit $A^T A$ existe et que $\ker A^T A = \ker A$.

Solution 1. . Soit $X \in \ker A$, alors $A^T AX = A^T 0 = 0$, donc $X \in \ker A^T A$.
Soit $X \in \ker A^T A$. Par définition, $A^T AX = 0$. En multipliant par X^T, on obtient

$$0 = X^T A^T AX = (AX)^T(AX) = \|AX\|^2.$$

On en déduit $Ax = 0$ et donc $X \in \ker A$.
Par double inclusion, on a montré l'égalité demandée.

Exercice 2. ** Soit $n \in \mathbb{N}$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit.

1. Rappeler la valeur du produit $E_{i,j}E_{k,l}$ où $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose que H ne contient pas l'identité. Démontrer que : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$, et en déduire une contradiction.
3. Pour les 5/2 : On suppose $n = 2$. Montrer que H est isomorphe en tant qu'algèbre à $T_2(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Solution 2. .

1. *Comme $I_n \notin H$ et H hyperplan, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $M = M_H + \lambda_H I_n$ où $M_H \in H$ et $\lambda_H \in \mathbb{C}$ sont uniquement déterminés. Ainsi $M^2 = M_H^2 + 2\lambda_H M_H + \lambda_H^2 I_n$ appartient à H ssi $\lambda_H^2 = 0$, puisque par hypothèse $M_H^2 + 2\lambda_H M_H \in H$.*
2. *Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in H$, donc $E_{i,j} \in H$ et $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ donc $E_{i,i} \in H$ pour tout i. Mais la somme des $E_{i,i}$ vaut I_n, ce qui contredit l'hypothèse $I_n \notin H$.*
3. *Si $n = 2$ et H une algèbre de dimension 3 qui contient I_n. S'il existe $M \neq \lambda I_n$ diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP = D$ est diagonale. Or $N \in H \to P^{-1}NP$ est un isomorphisme d'algèbre.*
   Étudions $H' = P^{-1}HP$: par hypothèse, D n'est pas une homothétie, donc $E_{1,1}, E_{2,2} \in H'$. Comme H' est de dimension 3, il existe une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Or $NE_{1,1} = \beta E_{1,2}$ et $E_{1,1}N = \alpha E_{2,2}$. On en déduit que H' contient soit les matrices triangulaires supérieures, soit les matrices triangulaires inférieures. Quitte à prendre la transposée, on a le résultat.
   Si les seules matrices diagonalisables sont les homothéties, alors par changement de base, on se ramène à $T = \alpha I_n + \beta E_{2,1}$ et donc $E_{2,1} \in H'$. Donc il existe $N \in H$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ et $E_{2,1} \in H'$. Or $E_{2,1}E_{1,2} = E_{2,2}$ et $E_{1,2}E_{2,1} = E_{1,1}$ et H' est l'espace des matrices carrées tout entier, c'est absurde.

Exercice 3. ♡♡ **

1. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.
3. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution 3. . Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Δ une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les λ_i deux à deux distincts. On calcule

$$A\Delta - \Delta A = \big((\lambda_j - \lambda i)a_{i,j}\big)$$

1. *Une matrice A qui commute avec toutes les autres, commutent avec Δ. On en déduit que A est une matrice diagonale $A = \mathrm{Diag}(a_1, \cdots, a_n)$. De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $AE_{i,1} - E_{i,1}A = (a_i - a_1)E_{i,1}$. Donc $a_i = a_1$ pour tout i et $A = a_1 I_n$.*
   Réciproquement, la matrice d'une homothétie commute avec toutes les autres.
2. *Une matrice qui commute avec $GL_n(\mathbb{K})$ commute aussi avec $GL_n(\mathbb{K}) + \lambda I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
3. *Une telle matrice A commute avec Δ et donc est une matrice diagonale.*
   De plus, $A(E_{i,1} + E_{1,i}) - (E_{i,1} + E_{1,i})A = (a_i - a_1)(E_{i,1} - E_{1,i})$. On en déduit que A est encore une matrice diagonale.
4. *Une telle matrice A commute avec $E_{i,j} - E_{j,i}$, donc avec $(E_{i,j} - E_{j,i})^2 = -(E_{i,i} + E_{j,j})$.*
   On en déduit que A commute avec

   $$(E_{1,1} + E_{2,2}) + \cdots (n-1)(E_{1,1} + E_{n-1,n-1}) = \mathrm{Diag}(\frac{n(n-1)}{2}, 1, 2, n-1)$$

   Si $n \geq 3$, A commute avec une matrice diagonale de diagonale des scalaires deux à deux distincts, donc A est diagonale. On reprend alors le calcul précédent : $A(E_{i,1} - E_{1,i}) - (E_{i,1} - E_{1,i})A = (a_i - a_1)(E_{i,1} + E_{1,i})$. on end éduit que A est encore une homothétie.
   Si $n = 2$, une matrice antisymétrique s'écrit $\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha B$. Il faut et il suffit que A commute avec B pour qu'elle commuite avec toutes matrices antisymétriques.
   On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on trouve $a = d$ et $b = -c$. La condition est encore équivalente à $A \in$ $\mathrm{Vect}\,(I_2, B)$.

Exercice 4. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = MA$. Calculer la trace de φ en fonction de celle de A.

Solution **4.** **.** *On calcule la matrice de φ dans la base canonique :*

$$E_{i,j}A = E_{i,j} \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l}E_{k,l} = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

On en déduit que la coordonnée en $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$. La trace de φ est la somme de ces coefficients pour $i, j \in [\![1, n]\!]$: $tr\varphi = n \times \mathrm{tr}\, A$.

Exercice 5. ** Soient n et p deux entiers, avec $1 \leq p \leq n$. Montrer qu il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices de rang p.

Solution **5.** **.** *Pour tous entiers i, $j \in \mathbb{N}$, on écrit $i+j$ la somme modulo n. Soit $E_{k,l} = (\delta_{i,k}\delta_{l,j})$ un vecteur de la base canonique.*
On pose $A = \frac{1}{2}E_{i,j} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r-1} E_{i+m,j+m}$ et $B = \frac{1}{2}E_{i,j} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r-1} E_{i+m,j+m}$. Les vecteurs colonnes de ces deux matrices montrent qu'elles sont de rang r et $E_{i,j} = A + B$. L'ensemble des matrices de rang r est donc une famille génératrices, on peut en extraire une base.

2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 6. ♡

1. Soit $n \geq 2$. Soit $K_n = J_n - I_n$ où J_n est la matrice composée uniquement de 1. Montrer que $K_n^2 = (n-2)K_n + (n-1)I_n$; en déduire que K_n est inversible, et déterminer son inverse.
2. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $A = aJ_n + bI_n$. Dans le cas où A est inversible, calculer son inverse.

Solution **6.** **.**

1. *On a $J_n^2 = nJ_n$ et la relation montre que $K_n(K_n - (n-2) * I_n) = (n-1)I_n$ et donc K_n est inversible d'inverse $\frac{1}{n-1}(K_n - (n-2)I_n)$.*

2. Si $b=0$, alors A n'est pas inversible puisque J_n est de rang 1. On suppose par la suite que $b\neq 0$. On cherche l'inverse de A sous la forme $a'J_n+b'I_n$.

$$(aJ_n+bI_n)(a'J_n+b'I_n)=(naa'+ab'+a'b)J_n+bb'I_n$$

On choisit $b'=\dfrac{1}{n}$ et on cherche a' tel que

$$naa'+\frac{a}{b}+a'b=0\Rightarrow a'=\frac{-a}{b^2+nab},\ \text{si } b^2+nab\neq 0$$

On a donc montré que A est inversible si $b\neq 0$ et $b+na\neq 0$. Il reste à vérifier que si $b+na=0$, alors A n'est pas inversible, mais alors le vecteur $(1,\cdots,1)$ appartient clairement au noyau.

Exercice 7. Soit $M=\begin{pmatrix}\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0}\\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1}\\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ ayant M pour matrice.
2. En déduire l'inverse de M (méthode à retenir).

Solution **7.** **.**

1. L'application $P\mapsto P(X+1)$ dans la base canonique.

2. La matrice de $P\mapsto P(X-1)$.

Exercice 8. ♡ Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A puisse se mettre sous la forme $A=I_n-N$ avec N matrice nilpotente d'indice de nilpotence p, c'est-à-dire $N^p=0$ et $N^{p-1}\neq 0$.

1. Calculer $A\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}N^k\right)$.
2. Application : inverser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrice suivantes

$$B=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ et } C=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2\\ \vdots & & \ddots & \ddots & a\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution **8.** **.**

1. On trouve $A\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}N^k\right)=I_n-N^p=I_n$. D'où $A^{-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}N^k$.

2. Soit $J=(\delta_{i+1,j})$. On a $B=I_n+aJ$ et $C=I_n+aJ+\cdots+a^{n-1}J^{n-1}$ avec $J^n=0$. D'où $C^{-1}=I_n-aJ$ et $B^{-1}=I_n-aJ+\cdots+a^{n-1}(-1)^{n-1}J^{n-1}$

Exercice 9. ♡♡ Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices colonnes $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A=XY^T$.
2. En déduire que $A^2=\operatorname{tr}(A)\,A$.
3. Quand une matrice de rang 1 est un projecteur ?
4. On suppose $\operatorname{tr}A\neq -1$. Montrer que I_n+A est inversible et que

$$(I_n+A)^{-1}=I_n-\frac{1}{1+\operatorname{tr}A}A.$$

Solution **9.** .

1. *On écrit* $A = (C_1, \cdots, C_n)$*,* C_i *i-ème vecteur colonne. Alors la famille est de rang* 1*, donc il existe un indice* i_0*,* $C_{i_0} \neq 0$ *et pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, il existe* α_i *tel que* $C_i = \alpha_i C_{i_0}$*. On pose* $X = C_{i_0} = (c_1, \cdots, c_n)^T$ *et* $Y^T = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$*.*
2. *Comme* $Y^T X = \sum \alpha_i c_i = \operatorname{tr} A$*, on a*
$$A^2 = XY^T XY^T = X\left(Y^T X\right)Y^T = \operatorname{tr} A\, A.$$
3. *Il faut que* $tr\, p = 1$ *(cours) et cal suffit d'après la question précédente.*
4. *En effet, c'est encore 2/ qui donne la relation.*

3 Changements de bases - Matrices semblables

Exercice 10. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Solution **10.** . *On remarque que ces deux matrices ont même trace et même déterminant. Mais* $A - 2I_3$ *est de rang* 2 *et* $B - 2I_3$ *est de grang* 2*. on en déduit que* A *et* B *ne sont pas semblables.*

Exercice 11. ♡♡* Montrer que si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution **11.** . *On écrit* $R = P + iQ$ *telle que* $A = R^{-1}BR \iff RA = BR$*.*
On en déduit que $PA = BP$ *et* $QA = BQ$*. Ni* P*, ni* Q *ne sont censées être inversibles. Mais* $\det(P+iQ) \neq 0$ *montre que le polynôme* $\det(P + xQ)$ *n'est pas le polynôme nul, donc il existe un réel* x *tel que* $P + xQ$ *est inversible.*

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 = -A$.
Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution **12.** . *Si* A *inversible,* $A^2 = -I$*. D'où* $(\det A)^2 = -1$*, ce qui est impossible. Donc* $rg\, A \leq 2$*.*
Comme $A \neq 0$*, il existe* e_1 *tel que* $Ae_1 \neq 0$*.*
La famille (e_1, Ae_1) *est libre, sinon* $f(e_1) = \lambda e_1$*, avec* $\lambda \neq 0$ *et*
$$A^3 e_1 = \lambda^3 e_1 = -\lambda e_1$$
ce qui impliquerait $\lambda^2 = -1$ *impossible dans* $\mathbb{R}$*. Ceci étant valable pour tout* e_1 *on peut l'appliquer à* Ae_1 *et* (Ae_1, A^2e_1) *est libre, c'est une base de l'image.* A *restreint à l'image est un isomorphisme, donc image et noyau sont en somme directe, on prend* e_3 *base du noyau (le rang* $A < 3$*). Dans la base* (e_3, Ae_1, A^2e_1) *la matrice obtenue est de la forme attendue.*

Exercice 13. * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution **13.** . *On pose* $r = \operatorname{rg} f$*, et si* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est la base canonique,* $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ *est une famille génératrice de l'image de* f*. On peut en extraire une base de l'image de* f*. Quitte à renuméroter, on suppose* $(f(e_1), \cdots, f(e_r))$ *base de l'image. Comme* $f^2 = 0$*, c'est aussi une famille libre du noyau. On complète en une base du noyau* $(f(e_1), \cdots, f(e_r), e'_{r+1}, \cdots, e'_{n-r})$*.*
Par construction vect$(e_1, \cdots, e_r) \cap \ker f = \{0\}$*. On en déduit que*
$$(f(e_1), \cdots, f(e_r), e'_{r+1}, \cdots, e'_{n-r}, e_1, \cdots, e_r)$$
est une base de E *et la matrice de* f *dans cette base est de la forme demandée.*

Exercice 14. ♡** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$ qui n'a que des 0 sur la diagonale.

Solution **14.** . *On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $A = 0$.*
Si le résultat est vrai pour n et supposons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Si A est une homothétie, alors $A = 0$, sinon, il existe X tel que AX et X non colinéaires et on complète (X, AX) en une base de $\mathbb{R}^n$ et dans cette base la matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$, mais A' est encore de trace nulle et on applique l'hypothèse de récurrence : la trace de A' est encore nulle, doncil existe $P' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $B' = P'^{-1}A'P'$ a tous ses éléments diagonaux nuls.
Ensuite, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B' \end{pmatrix}$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Par récurrence, on a montré le résultat pour tout $n \geq 1$.

4 Autres

Exercice 15. ***

1. Montrer que $\ker \mathrm{Tr} = \mathrm{Vect}\{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$, où Tr est la forme linéaire trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Monter que si Ψ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Psi(AB) = \Psi(BA),$$
alors $\Psi = \lambda \mathrm{Tr}$.
3. On veut montrer qu'en fait $\ker \mathrm{Tr} = \{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$: c'est-à-dire si $M \in \ker(\mathrm{tr}$, alors il existe A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$. Pour cela :
   (a) Montrer que l'on peut supposer M de diagonale nulle (on pourra utiliser l'exercice précédent).
   (b) Soit $\Delta = \mathrm{Diag}(1, \cdots, n)$. Déterminer le noyau puis l'image de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \mapsto \Delta X - X\Delta$.
   (c) Conclure.

Solution **15.** .

1. *La trace est une forme linéaire vérifiant $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Le noyau contient la famille des matrices de la forme $AB - BA$. En particulier, le noyau contient les matrices de la forme*
$$E_{i,j}E_{j,k} - E_{j,k}E_{i,j} = E_{i,k} - \delta_{k,i}E_{j,j}.$$
On en déduit que
   — *pour $i \neq k$, $E_{i,k} \in \{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$*
   — *pour $i = k = 1$ et $j \in [\![2, n]\!]$, $E_{1,1} - E_{jj} \in \{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$.*
La famille $(E_{i,k}, E_{1,1} - E_{j,j} \mid (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ i \neq k,\ j \neq 2)$ est libre de cardinal $n^2 - 1$. Par dimension, elle engendre $\ker \mathrm{Tr}$.
2. *On sait que* $\ker \Psi$ *est un hyperplan qui contient $\{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$. On en dduit comme précedemment que* $\ker \Psi = \ker \mathrm{Tr}$. *Deux formes linéaires qui s'annulent sur un même hyperplan sont proportionnelles.*
3. *(a) On a montré dans l'exercice précédent que toute matrice M de trace nulle est semblable à une matrice M' dont tous les éléments de la diagonale sont nuls : il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$.*
   S'il existe A' et B' telles que $M' = A'B' - B'A'$, alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.

(b) *Les matrices dont tous les éléments diagonaux sont nuls forment un espace vectoriel $\mathcal{D}$ de dimension $n^2 - n$.*
On étudie le noyau de $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \mapsto \Delta X - X\Delta$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$. Si $\varphi(X) = (y_{i,j})$, on a $y_{i,j} = (i-j)x_{i,j}$, d'où $\ker\varphi$ est exactement les matrices diagonales, espace de dimension n, donc l'image est de dimension $n^2 - n$ et est inclus dans $\mathcal{D}$, c'est $\mathcal{D}$.

(c) *On vient de montrer que si M' est de diagonale nulle, M' peut s'ecrire $M' = A'B' - B'A'$. D'après 3.a, on peut conclure.*

Exercice 16. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution **16.** **.** *On calcule $A^2 = A + 2I_3$. Soit $P = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$. On fait la division euclidienne de X^n par P : $X^n = QP + a(X-2) + b(X+1)$. En évaluant en 2 et en -1, on trouve $a = (-1)^n$ et $b = 2^n$. On en déduit que $A^n = a(A - 2I_n) + b(A + I_n)$.*

Exercice 17. * Soit $M \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\operatorname{rg}(M) = \min\{k \in \mathbb{N},\ M = AB$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})\}$.

Solution **17.** **.** *Il est clair que si $M = AB$ comme proposé par l'énoncé, alors*

$$\operatorname{rg} M \leq \min(\operatorname{rg}A, \operatorname{rg}B) \leq \min(p, k, p).$$

D'où rg(M) $\geq \min\{k \in \mathbb{N},\ M = AB$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})\}$.
De plus, si $M = (C_1|\cdots|C_q)$ est de rang r, alors il existe E_1,..., $E_r \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que

$$\operatorname{vect}(C_1, \cdots, C_n) = \operatorname{vect}(E_1, \cdots, E_r).$$

Soit $B_i \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne coordonnées du vecteur C_i dans la base $(E_1, \cdots, E_r)$.
On pose $A = (E_1|\cdots|E_r)$ et $B = (B_1|\cdots|B_q)$. Par construction, $M = AB$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})\}$. On en déduit l'égalité attendue.

Exercice 18. * Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. Soit G un groupe pour la composition inclus dans $\mathcal{L}(E)$ avec $G \neq \{0\}$.

1. Soit j l'élément neutre de G. Que peut-on dire de j en tant qu'endomorphisme de E ?
2. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang. On note r ce rang. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de tout élément u de G est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

Solution **18.** **.**

1. *Comme $j^2 = j$, j est la matrice d'un projecteur, donc dans une base $\mathcal{B}$ est de la forme $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit P la matrice de passage associée à ce changement de base.*
2. *Alors $G' = P^{-1}GP$ est encore un groupe. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ un élément de G'. Comme $J_rG = GJ_r$, on en déduit que $B = 0$ et $C = 0$ (matrices nulles de tailles différentes).*
De plus, M est inversible dans G, donc son inverse est de la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Mais ceci n'implique en aucun cas que $D = 0$ comme le montre l'exemple $G = \{E_{1,1}, E_{1,1} + E_{2,n}\}$.

Exercice 19. ♡ ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{rg}(A)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal p. Soit $A = \displaystyle\sum_{M \in G} M$.

   i) Vérifier que A/p est idempotente.

ii) On suppose que $\operatorname{tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.

iii) Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier divisible par p.

3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall M \in G, Mx = x\}$.

   i) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à $\operatorname{tr}(A)/p$.

   ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de cardinal p.

<u>Solution</u> **19.** **.**

1. La matrice A est la matrice d'un projecteur. Elle est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $M' \in G$, alors $M \mapsto M'M$ définit une bijection de G dans lui-même de réciproque $M \mapsto M'^{-1}M$, où M'^{-1} est l'inverse de M' dans G. On end éduit que $M' \sum_{M \in G} M = \sum_{M \in G} M$ (relation $*$).

On en déduit que $\left(\sum_{M \in G} M\right)^2 = p \sum_{M \in G} M$, d'où le résultat.

(b) Si $\operatorname{tr} A = 0$, alors $\operatorname{tr} A/p = 0$. Le matrice A/p est idempotente de trace nulle. D'après la question 1/, elle est de rang nul. C'est-à-dire $A = 0$.

(c) $\operatorname{tr} A/p = \operatorname{rg} A/p$ est un entier et $\operatorname{tr} A = p\operatorname{tr}(A/p)$. Ce qui montre que p divise la trace de A.

3. (a) L'ensemble F est un sous-espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels. Montrons que $F = \ker(\frac{1}{p}A - I_n)$: l'inclusion $F \subset \ker(\frac{1}{p}A - I_n)$ est immédiate.

Supposons $x \in \ker(\frac{A}{p} - I_n)$, alors $\sum_{M \in G} Mx = x$. Pour tout $M' \in G$, la relation $*$ montre que

$$M'x = (M' \sum_{M \in G} M)x = \sum_{M \in G} Mx = x$$

Donc $x \in F$. Comme le rang de $\frac{A}{p}$ est égal à sa trace, on obtient l'égalité attendue.

(b) Soit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\theta_p = \dfrac{2\pi}{p}$. On pose $G_p = \{R(k\theta_p),\ k \in [\![0, k-1]\!]\}$. On vérfirifie que G_p est un sous-groupe de cardinal p isomorphe aux racines p-ième de l'unité.

5 Déterminants

<u>Exercice 20.</u> * Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A - B) = \det(A + B) = 0$. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(xA + yB) = 0$.

<u>Solution</u> **20.** **.** *On pose $y = tx$ et on obtient $\det(A + tB) = 0$ qui est un polynôme en t dont le terme en degré 3 est donné par $\det B = 0$: en effet en posant $A = (C_1|\cdots|C_n)$ et $B = (C_1'|\cdots|C_n')$*

$$\det(A+tB) = t^n \det(C_1', \cdots, C_n') + t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \det(C_1', \cdots, C_{i-1}', \underset{i}{C_i}, C_{i+1}', \cdots, C'n) + \text{terme de degré } \leq n-2.$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 qui s'annule en $t = \pm 1, 0$ donc c'est le polynôme nul.

<u>Exercice 21.</u> ♡ * On pose pour $n \geq 2$

$$P_n(X) = X^n - X + 1.$$

1. Montrer que P_n admet n racines distinctes z_1, ..., z_n dans $\mathbb{C}$.

2. Calculer le déterminant de
$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

<u>*Solution*</u> **<u>21.</u> .**

1. On calcule $P'(X) = nX^{n-1} - 1$ dont on déduit que si z annule à la fois P et P', alors $z \neq 0$ et $z^{n-1} = \dfrac{1}{n} < 1$ donc $z^n = \dfrac{z}{n}$ qui dans P donne $\dfrac{z}{n} - z + 1 = 0$ et donc $z = \dfrac{n}{n-1} > 1$, donc il n'existe pas de tel z et P n'admet que des racines simples z_1, ...,z_n et
$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$
Le degré 1 ayant un coefficient -1 on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} z_j = (-1)^n$ et le coefficient de degré 0 montre que $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n$.

2. le déterminant est de la forme $\Delta = \det(a + z_1 e_1, \cdots, a + z_n e_n)$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $a = \sum e_i$. On développe ce déterminant
$$\Delta = (\prod_{j=1}^{n} z_j) \det(e_1, \cdots, e_n) + \sum_{i=1}^{n} \left((\prod_{j\neq i} z_j) \det(e_1, \cdots, \underset{i}{a}, \cdots, e_n) \right) = 2 \times (-1)^n$$

<u>Exercice 22.</u> ** *(Matrices tridiagonales)* La matrice tridiagonale $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de type (a, b) est la matrice telle que $a_{i,j} = \begin{cases} b \text{ si } i = j+1 \\ c \text{ si } i = j-1 \\ a \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$: $A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$

1. On note $T_n(a, b, c)$ le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $T_n(a, b, c)$ vérifie une relation d erécurrence double.
2. Si $a = 2\cos\theta$ et $b = c = 1$, calculer $\det A$.

<u>*Solution*</u> **<u>22.</u> .**

1. On développe le déterminant suivant la première colonne :
$$\det A = a \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$
En notant $T_n(a, b, c)$ le déterminant, on a
$$T_n(a, b, c) = aT_{n-1}(a, b, c) - bc\, T_{n-2}(a, b, c)$$
sachant que
$$T_2(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc, \quad T_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc.$$

La suite $T_n(a,b,c)$ est définie par une relation linéaire d'ordre 2 que l'on sait exprimer en fonction de n en posant $T_0(a,b,c)=1$ et $T_1(a,b,c)=a$.

2. *Par exemple si $b=c=1$ et $a=2\cos\theta$, alors l'équation caractéristique de*

$$T_n = 2\cos\theta\, T_{n-1} - T_{n-2}$$

admet pour racines complexes conjuguées non réelles $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient $T_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$ avec $T_0=1$ et $T_1 = 2\cos\theta$, d'où

$$T_n = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}.$$

Par continuité du déterminant T_n en θ, on en déduit que $T_n = n+1$ si $\theta=0$ c-à-d si $a=2$ et $T_n = (-1)^{n+1}(n+1)$ si $\theta=\pi$ c-à-d si $a=-2$.

Exercice 23. ** *(Déterminant de Cauchy)* Pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, on considère $a_ia_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i+b_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\le i,j\le n}$.

Si $a_i = i-1$ et $b_i = i$ pour tout i on appelle le déterminant de la matrice le déterminant de Hilbert.

Solution **23.** . *On multiplie chaque colonne par a_n+b_j, $1\le j\le n$*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \ddots & & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n+b_1}{a_{n-1}+b_1} & & \ddots & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

et on retranche la dernière ligne aux précédentes en remarquant que

$$\frac{a_n+b_j}{a_i+b_j} = 1 + \frac{a_n-a_i}{a_i+b_j}$$

et le déterminant devient

$$\frac{1}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_1} & & \ddots & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

On factorise chaque ligne $1\le i\le n-1$ par (a_n-a_i) et on soustrait la dernière colonne

$$\frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, on développe suivant la dernière ligne et on factorise chaque ligne i par $\dfrac{1}{a_i+b_n}$ et chaque colonne j par b_n-b_j et on obtient que le déterminant Δ_n au rang n vaut

$$\Delta_n = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_n+b_i)\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)} \times \Delta_{n-1}$$

et on conclut par récurrence.
Comme dans Vandermonde (si les a_i et les b_i sont deux à deux distincts), on peut calculer beaucoup plus rapidement le déterminant de Cauchy, mais c'est hors programme car utilise les polynômes à deux variables : on considère Δ comme une fraction rationnelle en $X = a_n$ et $Y = b_n$. Alors Δ_n s'annule en chaque $X = a_i$ et $Y = b_i$ donc le numérateur se factorise par le produit des $(X - a_i)$ et $(Y - b_j)$, le dénominateur étant le produit des $(X + a_i)$ et des $(Y + b_j)$, le coefficient constant étant donné par Δ_{n-1}.

Exercice 24. ♡** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

1. Montrer que $d_n \leq n$.
2. Déterminer d_2.
3. Si n est impair, montrer que $d_n = 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ privé de la matrice nulle est inclus dans $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. En déduire d_4.

Solution **24.** .

1. *Si $(E_1, \cdots, E_l)$ est une base d'un sous-espace vectoriel tel que tout élément non nul est inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$. $(E_1X, \cdots, E_lX)$ est liée, $(\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_l)X = 0$ et comme $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_l$ est soit la matrice nulle, soit inversible, on en déduit que $X = 0$ et donc pour $X \neq 0$, $(E_1X, \cdots, E_nX)$ est libre. On en déduit que $l \leq n$.*
2. *L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ convient et est de dimension 2. On en déduit que $d_2 = 2$.*
3. *Si n est impair, on suppose qu'il existe deux matrices A et B non liées. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait que $\det A + \lambda B$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\det B$. Ce polynôme admet une racine dans $\mathbb{R}$, ce qui contredit vect$(A, B) \subset \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \cup 0$.*
4. *Si A est une matrice de la forme annoncée, $AA^T = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_n$. On en déduit $d_4 = 4$.*

Exercice 25. ♡♡**

1. Donner le rang de $Com(A)$ en fonction de celui de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Résoudre $A = Com(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution **25.** .
1 *Si A est inversible, alors $Com(A)$ aussi et on en déuit que $rg\, A = rg Com(A)$.*
Si A est de rng $n-2$, alors tous les mineurs $n-1 \times n-1$ sont nuls et $Comm(A) = 0$.
Si A est de rang $n-1$, montrer que $Com(A)$ est non nulle et comme $Comm(A)^T A = \det(A) I_n = 0$, le rang de $Com(A)$ est au plus 1 donc exactement 1.
2. *Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Com(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $a = d$ et $b = -c$: $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$.*
Sinon, les matrices A et $Comm(A)$ ont même rang.
Si A est de rang $\leq n-2$, alors $A = Com(A) = 0$.
Si A est de rang $n-1$, le rang de $Com(A)$ est 1 ; il n'y a pas de solution.
Si A est inversible, alors on a $A^T A = \det(A) I_n$ d'où $(\det A)^{n-2} = 1$; dont on déduit $\det A = \pm 1$. Mais la trace de $A^T A \geq 0$ donc $\det A = 1$. Et réciproquement, si $A^T A = I_n$ et $\det A = 1$, on a bien égalité.

Exercice 26. * Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$ telle que pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(A + X) = \det X$, motrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.
En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(A + X) = \det(B + X)$, alors $A = B$.

Solution **26.** . *En posant $X = 0$, on obtient $\det A = 0$.*
Ensuite, A a un noyau non trivial, soit H un supplémentaire respectif de $\ker A$, G un supplémentaire de $Im A$ et X la matrice de l'application envoie $\ker A$ sur G et H sur 0. Si $A \neq 0$, alors X n'est pas inversible et $A + X$ l'est d'où une contradiction, donc $A = 0$.
Prendre $X - B$ donne $A - B = 0$.

Exercice 27. ** Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall ij, \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq 1,$$

alors $|\det A| \leq 1$.

Solution **27.** . *Procéder par récurrence sur n et développer suivant une ligne, puis majorer avec l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence.*

Exercice 28. ♡♡** Soit A et B, C et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.
2. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.
3. Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
4. Trouver un contre-exemple au point précédent si A et B ne commutent pas.
5. On suppose que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Solution **28.** .

1. *On ajoute les lignes puis les colonnes*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = \det(A-B)\det(A+B)$$

2. *On peut écrire*

$$\begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & i_n I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & iI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iA - B & 0 \\ -iB & iA+B \end{vmatrix} = \det(iA-B)\det(iA+B)$$

dont on déduit $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB) \geq 0$ *car de la forme* $z\bar{z}$.

3. *On a dans ce cas, comme déjà vu,* $(A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2$.
4. *Prendre* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^T$.
5. *Si A est inversible, on écrit*

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ A^{-1}B & AD - CB \end{vmatrix} = \det(AD - CB)$$

Si A n'est pas inversible, on commence par appliquer le résultat à $A - xI_n$ *qui commute avec C et est inversible pour* $0 < x < \inf\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Spec}\,(A) \setminus \{0\}\ \}$ *et par continuité, on en déduit l'egalité pour tout A.* $\mathrm{Spec}\,(A)$ *est l'ensemble des racines de du polynôme* $\det(A - \lambda I_n)$.

Matrices

(Solutions)