Réduction des matrices

1 Éléments propres - diagonalisation

Exercice 1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_4(\mathbb{K})$.
La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

Solution **1.** . *La matrice B est diagonale par blocs. Pour $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $B = \mathrm{Diag}\,(C, -C)$.*
Ainsi, on a $\chi_B(X) = \chi_C(X)\chi_{-C}(X) = (X^2+0+1)(X^2+0+1) = (X^2+1)^2$.
Pour F un sous-espace stable par B, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur F est de degré $\dim(F)$ et divise χ_B.
- Si le corps $\mathbb{K}$ possède un nombre r tel que $r^2 = -1$ (par exemple $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), on a alors $\chi_B(X) = (X-r)^2(X+r)^2$. Dans ce cas χ_B possède des diviseurs de degré 3.
Dans un tel corps, le polynôme caractéristique de la matrice C est $(X-r)(X+r)$. Ainsi, les matrices C et $-C$ possèdent des vecteurs propres pour les valeurs propres r et $-r$.
En prenant $F = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de C, F est alors un sous-espace stable par B de dimension 3.
- Si dans le corps $\mathbb{K}$ le nombre -1 n'est pas un carré (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$), alors χ_B ne possède que des diviseurs de degré 0, 2 et 4. La matrice B ne possède ainsi pas de sous-espaces stables de dimension 3.

Exercice 2. Diagonaliser si possible les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution **2.** . *Les matrices A, B, C sont diagonalisables et respectivement semblables à Diag $(0,2,-2)$, Diag $(0,3,3)$ et Diag $(2,2,2,-2)$ de matrices de passages*

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. ♡ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable.
Montrer que BA est diagonalisable.

Solution **3.** . *Comme AB est diagonalisable et A inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$ est semblable à AB. Ainsi, la matrice BA est aussi diagonalisable.*

Exercice 4. ♡ Calculer $\chi_{A^{-1}}$ le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de $A \in Gl_n(\mathbb{C})$.

Solution **4.** . *On trouve $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \dfrac{(-1)^n}{\det A}\chi_A(\dfrac{1}{\lambda})$.*

Exercice 5. * Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\Delta : E \to E$, $u = (u_n) \mapsto \Delta(u) = \big(\Delta(u)_n\big)$ définie par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Solution 5. . Si $\Delta(u) = \lambda u$, on a pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, d'où $u_n = (1+\lambda)^n u_n$ et cette suite est bornée ssi $\lambda \in [-2; 0]$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et I l'endorphisme de E qui à $f \in E$ associe la primitive de f qui s'annule en 0. Trouver les valeurs propres de I.

Solution 6. . Une fonction f telle que $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$ avec $\lambda \neq 0$ donne $f(x) = \lambda f'(x)$ d'où $f(x) = \alpha e^{\lambda^{-1}x}$ et comme la primitive s'annule en 0, il n'y a pas de solution.

Exercice 7. ♡ Soit $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3. En déduire que A est diagonalisable et trouver les éléments propres.

Solution 7. . Remarquons que $A^3 = A$. De plus, A est de rang 2.
Les valeurs propres sont 0, 1 et -1. On a $E_0 = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_{n-1})$. Pour identifier simplement E_1 et E_{-1}, pensez que ce sont des sous-espaces de $Im\, f$. On trouve $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 + \cdots + 2e_{n-1} + e_n)$ et $E_{-1} = \mathrm{Vect}(e_1 - e_n)$.
On en déduit que A est diagonalisable. On a $\chi_A = (X^2-1)X^{n-2}$.

Exercice 8. ♡* Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Solution 8. . $M - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et $E_1 = \ker(M - I_n)$ est de dimension $n-2$ de base $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (e_2 - e_3, \cdots, e_2 - e_n)$.
Puis on résoud $(M - I_n)X = \lambda X$ avec ${}^tX = (x_1, \cdots, x_n)$ pour $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_i \text{ pour } i \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \dfrac{n-1}{\lambda} = 0 \\ x_1 = \lambda x_i \text{ pour } i \geq 2 \end{cases}$$

dont on déduit deux autres valeurs propres pour $M - I_3$: $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$ et de vecteur propre associé ${}^tX = (1, \frac{1}{\lambda}, \cdots, \frac{1}{\lambda})$.

Les valeurs correspondantes pour M sont $1+\lambda$.
On peut aussi écrire la matrice M' de $M-\lambda I_n$ dans la base $(e_1, e_1+\cdots+e_n, e_2-e_3, \cdots, e_2-e_n)$:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et on étudie le bloc } 2\times 2.$$

<u>Exercice 9.</u> ♡♡* Pour tout triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, soit la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1,0,0)$ la matrice identité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$. Diagonalisez astucieusement $M(a,b,c)$.

<u>Solution 9.</u>. Avec les notations de l'énoncé, $K = M(0,0,1) = J^2$ et $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.
Pour diagonaliser $M(a,b,c)$, il suffit de diagonaliser J. Pour cela :

1. *Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :* $\det(J-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}.$

   D'où $\chi_J(X) = X(X^2-2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\operatorname{spec} J = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
   On remarque que l'on a

   $$J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}.$$

   La résolution des équations $JX = \sqrt{2}X$ et $JX = -\sqrt{2}X$ nous donne deux autres vecteurs propres :

   $$J\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, J\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}.$$

   Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\operatorname{Ker}(J-0I) = \operatorname{Vect}(\vec{u})$, $\operatorname{Ker}(J-\sqrt{2}I) = \operatorname{Vect}(\vec{v})$ *et* $\operatorname{Ker}(J+\sqrt{2}I) = \operatorname{Vect}(\vec{w})$. *La matrice J est donc diagonalisable.*

2. *Soit P la matrice de passage de la base canonique (e_1,e_2,e_3) vers la base (u,v,w). On a :*

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Avec cette matrice P, on obtient :

   $$P^{-1}\cdot J\cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1}\cdot K\cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Finalement, on obtient

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\cdot M(a,b,c)\cdot P &= a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&+\sqrt{2}&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a+b\sqrt{2}+2c&0\\0&0&a-b\sqrt{2}+2c\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Le spectre de la matrice $M(a,b,c)$ *est donc* $\{a, a+b\sqrt{2}+2c, a-b\sqrt{2}+2c\}$.

Exercice 10. ♡♡ ** Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M=\begin{pmatrix}A&-I_n\\0&A\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et de n.
2. Que dire sur le rang de M si A est diagonalisable ?
3. La matrice M peut-elle être diagonalisable ?

Solution **10.** **.**

1. Résolvons le système

$$
\begin{pmatrix}A&-I_n\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases}AX=Y\\AY=0\end{cases} \iff \begin{cases}X\in\ker A^2\\AX=Y\end{cases}
$$

On en déduit un isomorphisme $\ker A^2\to\ker M$, $X\mapsto\begin{pmatrix}X\\AX\end{pmatrix}$. *Donc le rang de* M *vaut* $n+\operatorname{rg}A^2$.

On peut aussi utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes :

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix}I_n&0\\A&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&-I_n\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}I_n&A\\0&I_n\end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix}I_n&0\\A&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-I_n&A\\A&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}I_n&A\\0&I_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-I_n&A\\0&A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&A\\0&I_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-I_n&0\\0&A^2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Si A *est diagonalisable, alors* $\dim\ker A=\dim\ker A^2$ *et donc* $rg\,M=n+\operatorname{rg}A$.

3. Si M *est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule* M

$$
P(M)=0=\begin{pmatrix}P(A)&-P'(A)\\0&P(A)\end{pmatrix}.
$$

Donc, $P(A)=P'(A)=0$ *et* A *est diagonalisable, toute valeur propre de* A *est valeur propre double de* A*, ce qui est absurde. La matrice* M *n'est pas diagonalisable.*
On peut faire un raisonnement plus simple : si M *est diagonalisable, alors le rang de* M *est égal au rang de* M^2 *; or*

$$
M^2=\begin{pmatrix}A^2&2A\\0&A^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&-2I_n\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}.
$$

Donc $rg\,M=\operatorname{rg}A^2+n\le 2\operatorname{rg}A$. *On en déduit que* A *est inversible. Mais c'est absurde, car* A *possède une valeur propre dans* $\mathbb{C}$*, et* $M-\lambda I_n$ *n'est pas diagonalisable et* M *non plus.*
Ou encore, si on sait que la restriction d'un endomorphisme diagnalisable est diagonalisable : on prend $\lambda\in\operatorname{Spec}A$ *et* $X\in E_\lambda(A)$. *Alors les vecteur* $\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0\\X\end{pmatrix}$ *sont stables par* M *et le "morphisme induit par* M *sur ce plan rapporté à cette base pour matrice* $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$ *qui n'est pas diagonalisable.*

Exercice 11. ♡♡** Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable ssi A est diagonalisable et $1 \notin \mathrm{Spec}\,(A)$.

Solution **11.** . *On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et on calcule*

$$B' = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Si P est un polynôme, $P(B') = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(I_n) \end{pmatrix}$. Si B' admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P, alors $P(A) = 0$ dont on déduit que A est diagonalisable.
De plus, le rang de $B' - I_{2n} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vaut exactement n. On en déduit que la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme carcatéristique $\chi_B = \chi_A \times (X-1)^n$ est n. Ce qui montre que 1 n'est pas racine de χ_A, ce que nous voulions.
Réciproquement, Si A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre. Soit $\lambda \in \mathrm{SpecA}$, la dimension de $E_\lambda(A) = n_\lambda$ la multiplicité de la racine λ dans χ_A. Or On a un morphisme injectif $E_\lambda(A) \to E_\lambda(B')$, $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc $\dim E_\lambda(B') \geq n_\lambda$. De plus, nous avons déjà remarqué que $\dim E_1(B') = n$. Donc la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des racines. Le polynôme χ_B étant scindé, on en déduit que B' est diagonalisable.

Exercice 12. ♡♡*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Solution **12.** .

1. *Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, alors $BZ = \begin{pmatrix} Y \\ AX \end{pmatrix}$. Donc*

$$BZ = \lambda Z \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda Y \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda^2 X \end{cases}$$

X doit être un vecteur propre associé à une valeur propre strictement positive de A ; la condition est nécessaire d'après ce qui précède, elle est clairement suffisante.

On peut aussi remarquer que $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ montre que si B est diagonalisable, alors A l'est avec une diagonale positive. De plus, $rg\,B = \mathrm{rg}\,B^2$. Et comme $rg\,B = \mathrm{rg}\,A + n$, on en déduit $rg\,A = n$. Ce qui montre que les valeurs propres sont strictement positives.
Réciproquement, si A est diagonalisable de diagonale strictement positive, alors il existe un polynôme minimal scindé à racines simples ($\neq 0$) qui annule A. Les racines étant non nul, alors $P(X^2)$ est encore un polynôme scindé à racines simples qui annule B, donc B est diagonalisable.

Exercice 13. ♡♡* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Pour $A \in E$, on introduit $\Psi : E \to E$ défini par

$$\Psi(M) = AM.$$

1. Montrer que A et Ψ ont même valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de Ψ en fonction de ceux de A.
2. Montrer que Ψ est diagonalisable ssi A l'est.

Solution **13.** . *1/ Soit λ tel que $AV = \lambda V$, $V \in \mathcal{M}_{n,1}$, alors $M = (V|\cdots|V)$ est vecteur propre de Ψ de valeur propre λ.*
Réciproquement, si $M(C_1|\cdots|C_n)$,

$$AM = \lambda M \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad AC_i = C_i \iff M = (C_1|\cdots,|C_n) \in E_A(\lambda)^n.$$

On en déduit que $\mathrm{Spec}\,(A) = \mathrm{Spec}\,(\Psi)$ et $\dim E_\psi(\lambda) = n \times \dim E_A(\lambda)$.
2/ On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut $\dim E$ ssi la somme de la dimension des sous-espaces propres de Ψ vaut $\dim \mathcal{L}\,(E)$, d'où le résultat.

2 Matrices trigonalisables

Exercice 14. * Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\det f = \mathrm{tr}\, f = 0$?

Solution **14.** . *Son polynôme caractéristique est X^2, donc f est nilpotente trigonalisable. Dans une base adaptée la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 15. ♡ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n.

Solution **15.** .

1. *On écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I_3 = B - I_3$ et B est nilpotente : $\chi_B = X^3$. Donc A n'est pas diagonalisable.*
2. *B et I_3 commutent : $A^n = (-1)^n \left(I - nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2 \right)$.*

Exercice 16. ** Montrer qu'une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans une base orthormée.

Solution **16.** . *Procéder par récurrence.*

Exercice 17. ♡♡*

1. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant même spectre et même sous-espaces propres sont-elles nécessairement semblables ?
2. Et si elles sont trigonalisables ?
3. Et si elles sont diagonalisables ?

Solution **17.** . *Pour les questions 1/ et 2/ la réponse est non, comme le montre l'exemple suivant : Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes de même noyau, mais leurs indices de nilpotence diffèrent. Elles ne sont pas semblables.*
Si A est diagonalisable, l'hypothèse même sous-espace propre est ambigüe : une base de diagonalisation est certes commune aux deux matrices, mais les sous-espaces propres sont-ils associés aux même valeurs propres ? Si $A = \mathrm{Diag}(1, 2, 2)$ et $B = \mathrm{Diag}(1, 1, 2)$, alors les sous-espaces propres sont les mêmes, mais pas associés aux même valeurs propres. Il est clair que A et B ne sont pas semblables.

3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 18. ♡♡* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_A son polynôme caractéristique.

1. Montrer que si P_A est scindé, alors P_{A^k} l'est pour tout $k \in$.
2. Montrer que si P_{A^2} est scindé à racines toutes positives alors P_A est scindé.
3. Donner un exemple où P_A n'est pas scindé, mais P_{A^3} l'est.

Solution **18.** **.**

1. *Si P_A est scindé, alors A est trigonalisable, donc A^k aussi et P_{A^k} est scindé.*
2. *On sait que A est scindé dans $\mathbb{C}$ et si λ est une valeur propre (complexe), alors λ^2 est valeur propre de A^2, donc un réel positif, et les racines carrées d'u réel positif a sont $\pm\sqrt{a}$, donc toutes les racines de P_A sont réelles : P_A est scindé dans $\mathbb{R}$.*
3. *Il suffit de prendre une rotation d'axe z et d'angle $2\pi/3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$.*

Exercice 19. ** Soit F une sons-algèbre de $M_n(K)$, contenant ans moins un elément de $GL_n($ K$)$. Montrer que $F \cap GL_n(K)$ est un soug-groupe de $GL_n(K)$.

Solution **19.** **.** *La seule diffculté est de montrer que l'inverse reste dans F : le thérorème de Cayley-Hamilton montre que si A est inversible, alors A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.*

Exercice 20. ♡♡* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable et $\ker u = \ker u^2$.

Solution **20.** **.** *Il es clair que si u est diagonalisable, alors u^2 l'est et $E_0(u) = E_0(u^2)$.*
Réciproquement, si u^2 est digonalisable, il existe un polynôme simplement scindé $p = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ tel que $p(u^2) = 0$. Mais alors $p(X^2)$ annule u et $p(X^2) = \prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i)$. De plus, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u^2 - \lambda_i id) = E$$

Si $\lambda_i \neq 0$, le théorème des noyaux nous dit que $\ker(u^2 - \lambda_i id) = \ker(u - \alpha_i id) \oplus \ker(u + \alpha_i id)$ où $\alpha_i^2 = \lambda_i$. On en déduit que

$$E = \ker u^2 \bigoplus_{i=1}^{r} (\ker(u - \alpha_i id) \oplus \ker(u + \alpha_i id))$$

Donc E est somme directe de des sous-espaces propres de u si et seulement si $\dim \ker u^2 = \dim \ker u$. Mais comme $\ker u \subset \ker u^2$, on a l'égalité.

Exercice 21. ♡* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On note $H_f = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = 0\}$. Montrer que H_f est un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension.
2. Soit F l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $u \mapsto f \circ u$. Montrer que F et f ont même valeurs propres et que F est diagonalisable ssi f l'est.

Solution **21.** **.**

1. *On sait que $f \circ u = 0$ ssi $\mathrm{Im}\, u \subset \ker f$, donc u induit une application de $\mathcal{L}(E, \ker f)$ qui est isomorphe à H_f, ce qui montre bien que H_f est un sous-espace vectoriel et que $\dim H_f = n \dim \ker f$.*
2. *Si $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(f)$ de vecteur propre associé v, une projection p_v sur $\mathbb{K}v$ vérifie $F(p_v) = f \circ p_v = \lambda p_v$.*
   Si $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(F)$. u est un vecteur propre associé λ ssi $F(u) = \lambda$ ssi $f \circ u - \lambda u = 0$ ssi $(f - \lambda Id) \circ u = 0$ or $u \neq 0$, donc $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(f)$. Ce qui montre $\mathrm{Spec}\,(F) = \mathrm{Spec}\,(f)$
   Si E_{λ_1}, ..., E_{lmabda_r} et F_{λ_1}, ..., F_{λ_r} les sous-espaces propres de f (resp. F) associés à la valeur propre λ_i, alors on a montré que $F_{\lambda_i} = H_{f-\lambda_i - Id}$ et donc $\dim F_{\lambda_i} = n \dim E_{\lambda_i}$.
   Finalement
   $$\dim E = \sum \dim E_{\lambda_i} \iff \dim \mathcal{L}(E) = \sum \dim F_{\lambda_i}$$
   ce qui montre bien que f est diagonalisable ssi F l'est.

Exercice 22. $\heartsuit$ Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ et montrer que ce sont exactement les polynômes en A.

Solution **22.** . *On calcule* $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, *$A$ est donc diagonalisable et semblable à D =Diag$(1,2,3)$ et le commutant de cette matrice est exactement l'ensemble des matrices diagonales qui est engendré par les polynôme en D, donc le résultat est préservé pour A : le commutant est de dimension 3 est exactement $\mathbb{K}[A]$ qui est de dimension le degré du polynomole minimal annulateur unitaire.*

Exercice 23. $\heartsuit\heartsuit$ * Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et montrer que ce sont exactement les polynômes en A.

Solution **23.** . *On calcule* $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ *et* $rg(A-3I_3) = 2$, *donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.*
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *: On prend un vecteur propre $e_1 \in E_1$; la matrice étant étant trigonalisable, on prend un vecteur de $e_3 \in \ker(A-3I_n)^2 \setminus \ker(A-3I_3)$ et $e_2 = (A-3I_3)e_3$.*
Soit $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *qui commute avec A'. On en déduit $b=c=d=g=h=0$, $e=i$ et a, e et f dans $\mathbb{R}$. Le commutant est de dimension 3.*
Or (I_3, A', A'^2) est libre donc engendre le commutant de M' qui est de dimension 3. Et finalement, le commutant de A est engendré par (I_3, A, A^2) de dimension 3.

4 Autres classiques

Exercice 24. $\heartsuit\heartsuit$** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si son spectre est réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = \cdots = \mathrm{tr}\,(A^n) = 0$.
3. On suppose $\mathrm{tr}\,(A) = \cdots = \mathrm{tr}\,(A^{n-1}) = 0$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

Solution **24.** .

1. *Si A est nilpotente, X^p est un polynôme annulateur scindé, donc le spectre de A est inclus dans $\{0\}$ et est non vide : il est réduit à 0.*
   Réciproquement, si le spectre de A est réduit à 0, alors son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré n scindé (on est dans $\mathbb{C}$) qui a 0 pour unique racine : c'est donc X^n. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, ce qui montre A nilpotente.
2. *Comme A est trigonalisable, si λ_1,..., λ_p sont ses valeurs propres de multiplicité respective n_1,..., n_p, alors $trA^k = \sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i^k$. En particulier, si A est nilpotente, alors $tr\,A^k = 0$ pour tout $k \geq 1$.*
   Réciproquement, si $trA^k = \sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i^k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Quitte à retirer la valeur propre 0

qui n'intervient pas dans le cacul de la trace, on suppose que $\lambda_i \neq 0$ *pour tout* $1 \leq i \leq p$.
Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $p \times p$ *est un déterminant de Vandermond* $\lambda_1 \cdots \lambda_p \prod_{1 \leq i < j \leq p}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)$ *qui est non nul si les* λ_i *sont non nuls et deux à deux distincts. On en déduit que le spectre de* A *est réduit à* $\{0\}$.

3. *Si on ne suppose pas tr* $A^n = 0$, *alors le raisonnement plus haut s'applique sauf si le spectre de* A *est composé de* n *complexes deux à deux distincts. Dans ce dernier cas,* A *est alors diagonalisable.*

Exercice 25. ♡♡** On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E et α un réel non nul.. On suppose que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ en fonction de k, α et f.
2. On définit l'application Ψ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ en posant $\Psi(h) = h \circ g - g \circ h$. Que dire de f^k par rapport à Ψ ?
3. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.

Solution **25.** **.**

1. *On procède par récurrence*
2. *On peut voir* f *comme un vecteur propre associé à la valeur propre* α *de l'applcation* $f \mapsto g \circ f - f \circ g$. *Et* f^k *semble un vecteur propre pour tout* k.
3. *En dimension fini, le spectre d'un endomorphisme est toujours fini. Conclure.*

Exercice 26. ♡* Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable non nul de u.

1. L'endomorphisme a-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{O_E\}$, la famille $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
   Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.
4. Existe-t-il de tels endomorphismes ?

Solution **26.** **.**

1. *Un vecteur propre engendre un sous-espace stable de dimension* 1, *donc,* u *n'a pas de valeur propre.*
2. *Si* $(x, u(x), \cdots, u^p(x))$ *est liée, alors il engendre un sous-espace stable par* u *de dimension* ≥ 1. *Donc* $p \geq n$.
3. *On retrouve une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est donné par les coefficients de la dernière colonne.*
4. *Ce polynôme est indépendant du choix de la base, donc la matrice compagnon ne change pas.*
5. *Si* P *n'a pas de racine, alors il faut* n *pair et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Si λ *ext une valeur propre complexe de vecteur propre* u, *alors* $\overline{\lambda}$ *est aussi valeur propre de vecteur propre* $\overline{u}$ *et on vérifie que* $u + \overline{u}$ *et* $i(u - \overline{u})$ *sont des vecteurs réels qui engendrent un plan stable. Donc* $n = 2$.
   Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, *alors il en existe pour tout* n.

Exercice 27. ♡* Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$, $B \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_n + a^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose

$$H = \{I_n + P(B) \ \ P \in \mathbb{C}[X], \ P(0) = 0\}.$$

   Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Solution **27.** **.**

1. *On calcule* $(I_n+B)(I-B+B^2+\cdots+(-1)^{p-1}B^{p-1}) = I_n$, *d'où* $I+A^{-1}BA$ *est inversible d'inverse* $I-A^{-1}BA+A^{-1}B^2A+\cdots+(-1)^{p-1}A^{-1}B^{p-1}A$.
2. *Il est clair que* H *est non vide et stable par produit et que la multiplication est commutative. Il faut essentiellement prouver que* $I+P(B)$ *est inversible dans* H *: or* $P(0)=0$ *montre que* $P(B) = a_1B+\cdots+a_dB^d$ *et la formule du du binôme montre que* $P(B)^p = 0$ *et on applique 1/ à* $P(B)$.

Exercice 28. ♡♡**

1. Ici $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$. Montrer que pour toutes matrices carrées A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (Commencer par le cas A inversible)
2. Ici, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\lambda^p\chi_{AB} = \lambda^n\chi_{BA}$. On pourra considérer la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$.

Solution **28.** **.**

1. *Si* A *est inversible, alors* $\det(\lambda I_n - AB) = \det\left[A(\lambda I_n - BA)A^{-1}\right]$ *d'où le résultat. Puis si* A *est quelconque, on sait qu'il existe une suite* $(A_k) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *qui converge vers* A *et les applications* $B \mapsto \det(\lambda I_n - AB)$, $B \mapsto \det(\lambda I_n - BA)$ *sont des fonctions fonctions polynômes donc continues. Par passage à la limite, on en déduit le résultat.*
2. *On trigonalise sur les colonnes avec* λI_n *ou* I_p *le pivot :*

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ B & -BA+\lambda I_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

dont on déduit que $\lambda^{n-p}\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Exercice 29. ♡♡♡*** Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ base de E. Une matrice est cyclique si elle est la matrice d'un endomorphisme cyclique.

1. Vérifier qu'une matrice A est cyclique ssi est elle est semblable à une matrice compagnon.
2. Montrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $x \in E$, l'ensemble
$$I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ,\ P(u)(x) = 0\}$$
est un idéal principal dont on notera le générateur unitaire $\pi_{u,x}$.
3. Soit π_u le polynôme minimal unitaire de $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$.
4. Montrer qu'un matrice est cyclique ssi son polynôme minimal et caractéristique coïncident.
5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une matrice est cyclique ssi tous ses espaces propres sont de dimension 1.
6. Une matrice A est cyclique ssi $\mathbb{K}[A] = C(A)$ où $C(A)$ est le commutant de A.

Solution **29.** **.**

1. *On écrit l'endomorphisme* u *dans la base* $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$.
2. *Il est clair que* $I_{u,x}$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$, *qui est principal. D'où le générateur qui est unique si on le suppose unitaire.*
3. *Pour tout* x, $\pi_u(x) = 0$, *car* $\pi_u(u) = 0$ *par définition du polynôme minimal. Ceci montre que* $\pi_{u,x}$ *divise* π_u.
Comme π_u *a un nombre fini de diviseurs, on n'a qu'un nombre fini de générateurs possibles que l'on note* $p_1 = \pi_{u,x_1}$, ..,$p_r = \pi_{u,x_r}$.
Par définition
$$E = \cup_{i=1}^r \ker p_i(u)$$

mais l'union de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel ssi l'un des sous-espaces vectoriels contient tous les autres.
Et donc il existe i_0 et $\ker \pi_{u,x_{i_0}} = E$. Ceci montre que $\pi_{u,x_{i_0}}$ annule u est unitaire et est divisible par π_u : on a égalité $\pi_u = \pi_{u,x_{i_0}}$.

4. *Si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique alors il existe $x \in E$, tel que $\pi_u = \chi_u = \pi_{u,x}$. Ceci montre que $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est libre (sinon contredit que $\pi_{u,x}$ est de plus petit degré). Par définition, u est cyclique.*
Réciproquement : $(Id, u, \cdots, u^{n-1})$ est libre puisqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, \cdots, u^{n-1}(x))$ libre. Ce qui montre $\dim \mathbb{K}[A] \geq n$, mais c'est aussi le degré du polynôme minimal !
5. *Se restreindre aux sous-espaces caractéristiques, et montrer qu'un endomorphisme n nilpotent est cyclique ssi $\dim \ker n = 1$.*
6. *On sait que la dimension de $C(A)$ vaut au moins n, donc $\dim \mathbb{K}[A] \geq n$, mais la dimension de $\mathbb{K}[A]$ vaut le degré du polynôme minimal.*

<u>Exercice 30.</u> ♡♡** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. On note G_M l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que λM soit semblable à M.

1. Quelle est la structure de G_M ?
2. Montrer que si M n'est pas nilpotente, G_M est fini.
3. Déterminer G_M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Que se passe-t-il si $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$?

<u>Solution</u> **30.** .

1. *On a $M \sim 1.M$, donc $1 \in G_M$. Et si $M \sim \lambda M \sim \mu M$, alors $M \sim \lambda\mu^{-1}$. Donc G_M a une structure de sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.*
2. *On sait que $\mathrm{Spec}\, M = \{a_1, \cdots, a_n\}$, alors $\mathrm{Spec}\, \lambda M = \{\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n\}$. Si de plus, les deux matrices sont semblable, alors alors leur spectre sont égaux. On en déduit que la multiplication par λ induit une permutation σ_λ sur le spectre de M. L'application qui à $\lambda \mapsto \sigma_\lambda$ est une morphisme injectif de groupes.*
3. *Pour la première matrice : $\pi_M = X^2 - X + 2$, donc a deux racines complexes non réelles, non nulles et conjuguées z et $\bar{z}$. Si $\lambda \in G_M$, alors $\lambda z \in \{z, \bar{z}\}$. Si $\lambda z = z$, alors $\lambda = 1 \in G_M$. Sinon, $\lambda z = \bar{z}$ et on doit alors avoir $\lambda \bar{z} = z$; donc λ est réel, mais c'est absurde. On en déduit que $G_M = 1$.*
Pour la seconde, le spectre vaut i et $-i$ et on vérfie que $G_m = \{-1, 1\}$.
Pour la troisième, on a $M^3 = 1$, et $\mathrm{Sp}\, M = \{1, j, j^2\}$. On vérfie que $G_M = \{1, j, j^2\}$
4. *On sait que toute matrice d'indice de nilpotence maximale est semblable à une matrice compagnon avec des 0 sur la diagonale. Comme pour $\lambda \neq 0$, λM est encore nilpotente, d'indice de nilpotence maximale, on en déduit que $G_M = \mathbb{C}^*$.*

<u>Exercice 31.</u> ♡♡** Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

<u>Solution</u> **31.** .

1. *On a montré en cours que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, en posant $F = S_u(x)$, on a $\mu_{u_F}(X) = \chi_{u_F}(X) = P(X)$, pour P un polynôme de degré $\dim(F)$.*
Ainsi, si $E = S_u(x)$ pour un certain $x \in E$, on a $\mu_u = \mu_{u_E} = \chi_{u_E} = \chi_u$. Le polynôme minimal de u est de degré n.
2. *Dans ce cas, on a $\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ et $\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ est scindé à racines simples, donc diagonalisable.*
On a donc $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ et tous les sous-espaces propres de u sont donc de dimension 1.

Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs propres de u pour les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors, d'après le cours, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
On pose $x = e_1 + \ldots + e_n$. Montrons qu'on a $S_u(x) = E$.
Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre (et donc une base de E).
Trouver des coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ est équivalent à trouver un polynôme $P(X) = a_0 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$ de degré au plus $n-1$ tel que $P(u)(x) = 0$.
Comme les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de u, on a :

$$P(u)(x) = P(u)(e_1 + \ldots + e_n) = P(u)(e_1) + \ldots + P(u)(e_n) = P(\lambda_1)e_1 + \ldots + P(\lambda_n)e_n.$$

Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a $P(u)(x) = 0$ si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Or, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i si et seulement si $(X - \lambda_i) \mid P$ pour tout i, si et seulement si $\mu_u = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n) \mid P$.
Comme on cherche P avec $\deg(P) \leq n - 1 < \deg(\mu_u)$, le seul polynôme P possible est $P(X) = 0$.
Donc, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Autre méthode : *On a $u(x) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Ainsi, pour tout $k \geq 0$, on a $u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \ldots + \lambda_n^k e_n$. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Posons $y = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$.*
Les coordonnées du vecteur y dans la base B sont ainsi :

$$(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i)$$

On reconnaît les coefficients d'une matrice de Vandermonde :
Posons $M = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice de Vandermonde associée aux nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Alors, pour $X = {}^t(a_0, \ldots, a_{n-1})$, on a :

$$MX = {}^t(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i).$$

Comme les nombres λ_i sont tous distincts, la matrice de Vandermonde M est inversible.
Donc, on a $y = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X = 0$, si et seulement si $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$.
Cela démontre que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Méthode express : *La matrice compagnon $C(\chi_A)$ est semblable à A car toutes deux diagonalisables semblables à diag$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. La famille $(e_1, ..., C(P)^{n-1}e_1)$ est une base où e_1 ets levecteur colonne de première coordonnée 1 et 0 sinon. Le vecteur e_1 convient.*

Réduction des matrices.

(Solutions)