Colle 05 Intégrales généralises

CHANTRE Victor

Exercice 1. Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n et J_n sont bien définies. Montrer que (I_n) est constante.
2. Montrer que $I_n - J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Solution **1.**

1. $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ *et* $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ *est continue sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\mathcal{I}_n$ *est bien définie.*
$\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ *et* $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$ *est continue sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\mathcal{J}_n$ *est bien définie.*
$\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos(2(n+1)t)\sin(t)}{\sin(t)} dt$ $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos(2(n+1)t)dt = \left[\frac{2}{2(n+1)} sin(2(n+1)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, *donc* $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

2. $\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) dt.$
Or $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t - \sin t}{t \sin t} \sim_0 \dfrac{t}{6}$ *se prolonge par continuité en* 0 *en posant* $f(0 = 0$. *Pour* $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-x^2 \cos x - (1 - \cos 2x)/2}{x^2 \sin^2 x}$$
qui vers $\dfrac{1}{6}$ *en* 0. *Donc* f *est d eclasse* $\mathcal{C}^1$.
On fait une intégration par partie dans l'intégrale définissant $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n$ *en dérivant* f *et en intégrant* $\sin(2n+1)t$ *:*
$$\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \left[f(t)\frac{-\cos(2n+1)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(2n+1)\, dt$$
La dernière intégrale est bornée indépendamment de n. *On en déduit*
$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = 0.$$
Il vient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathcal{J}_n = \frac{\pi}{2}$

3. $\forall x, y > 0, x < y$, $\displaystyle\int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - cos(t)}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1 - cos(t)}{t^2} dt$ *Or* $\dfrac{1 - cos(t)}{t} \sim_0 \dfrac{t}{2}$ *d'où* $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1 - cos(t)}{t} = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - cos(t)}{t} = 0$ *De plus,* $\dfrac{1 - cos(t)}{t^2} \sim_0 \dfrac{1}{2}$ *et* $\left|\dfrac{1 - cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, *donc* $t \mapsto \dfrac{1 - cos(t)}{t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *et par intégration par partie :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - cos(t)}{t^2} dt$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$
On pose le changement de variable $u = (2n+1)t$ *:*
$\mathcal{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$, *donc :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{J}_n = \frac{\pi}{2}$$

LUX Matthieu

Exercice 2. Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0\left(\left[1,+\infty\right[,\mathbb{R}_+^*\right)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $S(x) = \int_1^x f(t)dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2,+\infty[$.

Solution **2.**

1) On commence par quelques propriétés importantes de R.
Pour tout $x > 0$, $R(x) = \int_1^{+\infty} f(t)dt - \int_1^x f(t)dt$, ce qui permet de montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty\ [$, de dérivée $-f$ et que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$. De plus, R est strictement positive sur $[1, +\infty\ [$ et f est également positive, donc $g : x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est de signe fixe et l'étude de l'intégrabilité équivaut à l'existence d'une limite finie pour $x \mapsto \int_1^x g(t)dt$ lorsque x tend vers $+\infty$. Soit $X > 1$, comme $R' = -f$, on obtient

$$\int_1^X \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}dx = \begin{cases} \left[-\frac{R(x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_1^X & si\ \alpha \neq 1 \\ [-\ln(R(x))]_1^X & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$, l'intégrale considérée admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha > 0$ c'est-à-dire $\alpha < 1$. Finalement $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

2) La fonction S est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée f, nulle en 0 , strictement positive sur $]1, +\infty[$, ce qui justifie l'existence et la continuité de $g_\alpha : x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty\ [$, et de limite infinie en $+\infty$. Une primitive de g_α sur *$[2, +\infty\ [$ est $\frac{1}{(1-\alpha)S^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln S$ si $\alpha = 1$. Comme dans la première question, on montre que g_α est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

TOLUB Gabrielle

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x - 1/x) \end{array} \right.$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Solution **3.**

- *Soit* $\varphi_1 : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & x - 1/x \end{array}\right.$. *Pour tout* $x > 0, \varphi_1'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. *Ainsi* φ_1 *est un* $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\varphi_1\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$. *De même* $\varphi_2 : x \mapsto x - 1/x$ *est un* $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}_-^*$ *dans* $\mathbb{R}$. *De plus, soit* $y \in \mathbb{R}$. *L'équation* $\varphi_1(x) = y$ *est équivalente à* $x^2 - yx - 1 = 0$ *ce qui donne* $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$ *et puisque* x *doit être positif, on obtient* $\varphi_1^{-1}(y) = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$. *Le même calcul donne* $\varphi_2^{-1}(y) = \frac{y-\sqrt{y^2+4}}{2}$.

- *Soit* K *un segment de* $\mathbb{R}_+^*$. *On a*

$$\int_K |g(x)|dx = \int_K |f(\varphi_1(x))|\,dx = \int_{\varphi(K)} |f(u)| \left(\varphi_1^{-1}\right)'(u)du$$

avec $\left(\varphi_1^{-1}\right)'(u) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)$. *Comme pour tout* $u > 0$, *on a* $0 \leqslant \left(\varphi_1^{-1}\right)'(u) \leqslant 1$, *on obtient* $\int_K |g(x)|dx \leqslant \int_{\varphi(K)} |f(u)|du \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du$. *Par définition,* g *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On refait le même calcul sur les segments de* $\mathbb{R}_-^*$ *avec* $\left(\varphi_2^{-1}\right)'(u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right)$ *dont les valeurs sont dans* $[0,1]$.

- *Le fait d'avoir* g *intégrable sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et* $\mathbb{R}_+^*$ *ainsi que les deux* $\mathcal{C}^1$-*difféomorphismes* φ_1 *et* φ_2 *permet de réaliser le changement de variable dans les intégrales, ce qui donne*

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)du$$

ainsi que

$$\int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)du$$

En ajoutant, on obtient l'égalité demandée.

XXX

Exercice 4. Soit f une fonction convexe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$.
Étudier en $+\infty$ le comportement de $f'(x), xf'(x), f''(x)$.

Solution **4.**
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_{f,a}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *tend vers* 0 *en* $+\infty$.
Comme le taux d'accroissement est croissant, on en déduit que $f' \leq 0$. *Et* $\lim_{+\infty} f' = l \in \mathbb{R}$ *car* f' *est croissante majorée. Si* $l < 0$, $f'(x) \leq l$ *et donc* $f(x) - f(a) \leq l(x - a)$ *et* f *tend vers* $-\infty$, *ce qui contredit l'hypothèse* $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$.
Donc $l = 0$.
On en déduit que f' *est négative et que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ *converge. Donc* $\displaystyle\int_x^{2x} -f'$ *tend vers* 0 *avec* $-f'$ *décroissante.* $\displaystyle\int_x^{2x} f'(t)\, dt \geq x f'(x)$ *et donc tend vers* 0.
On ne peut rien dire sur f''.
Si f'' *est le la fonction triangle de base* $[n - \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{1}{n^3}]$ *et de sommet* (n, n).
0n a $\displaystyle\int_2^{+\infty} f''$ *existe et* $f'(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} f''$ *est un* $O(\dfrac{1}{x^2})$ *et* f *est un* $O(\dfrac{1}{x})$ *et donc tend vers* 0 *en* $+\infty$.