Corrigé du Kdo du 18/10/2024

Séries numériques & réduction

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{pq}{p+q}$.

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+n}$ est équivalent à $n(1-\ln 2)$.
2. En déduire un équivalent de $S_n - S_{n-1}$ puis de S_n.

Indications : sommes de Riemann & théorème de sommation des équivalents

---

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}+1}$ est une somme de Riemann de la fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ qui est continue sur le segment $[0,1]$, d'où $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = 1 - \ln 2$. Donc $u_n \sim n(1-\ln 2)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = 2\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{np}{p+n} - \frac{n}{2} = 2nu_n - \frac{n}{2}$, d'où $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1-\ln 2)$. On sort le télescope : $S_n = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (S_n - S_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$. Or $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1-\ln 2)$ qui ne change pas de signe, d'où : les deux séries divergent et, par sommation des équivalents,
$$S_n \sim 2(1-\ln 2)\sum_{k=2}^{n} k^2 \sim 2(1-\ln 2)\frac{n^3}{3}.$$

Exercice 2 (Théorème des moments)**.** Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ de taille $n \geq 2$. Montrer que :

1. si $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$, alors la matrice A est nilpotente (et réciproquement ?) ;
2. si $\mathrm{tr}(A) = \cdots = \mathrm{tr}(A^{n-1}) = 0$, alors la matrice A est nilpotente ou diagonalisable.

Indications : trigonalisation & déterminant de Vandermonde.

---

1. La matrice A est trigonalisable car elle appartient à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$: il existe donc une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telle que $P^{-1}AP = T$. Les éléments diagonaux de T sont par ailleurs les valeurs propres de A car $\chi_A(X) = \chi_T(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - t_{ii})$. On va montrer que toutes les valeurs propres sont nulles. Par l'absurde, supposons que la matrice A possède r valeurs propres non nulles $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distinctes deux à deux et notons $m_1, \cdots, m_r$ leurs multiplicités respectives. De $T = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$, on déduit que $T^k = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en

abusant un peu des notations : d'une part chaque valeur propre non nulle λ_i apparaît m_i fois sur la diagonale, d'autre part il apparaît un 0 sur la diagonale *ssi* 0 est une valeur propre. De $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$, on déduit que $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T^2) = \cdots = \mathrm{tr}(T^n) = 0$ (car la trace est un invariant de similitude) et donc que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i^k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. D'où le système de r équations

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{r-1} & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{r-1}^2 & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_{r-1}^{r-1} & \lambda_r^{r-1} \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_{r-1}^r & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{r-1} \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice carrée est inversible car son déterminant vaut $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_r \times V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ et est non nul car : d'une part, aucun des λ_i n'est nul, d'autre part le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq r} (\lambda_j - \lambda_i)$ est non nul car les complexes λ_i sont distincts deux à deux. Donc l'unique solution du système est $(m1, \cdots, m_r) = (0, \cdots, 0)$. C'est absurde. La matrice T est donc triangulaire supérieure stricte. Elle est donc nilpotente, et la matrice A aussi.

Réciproquement, si la matrice A est nilpotente, alors toutes ses valeurs propres sont nulles. (En effet X^n est un polynôme annulateur de la matrice A et le spectre est inclus dans l'ensemble des racines, donc $\mathrm{Sp(A)} \subset \{0\}$. Or $\mathrm{Sp(A)} \neq \emptyset$ car $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{Sp(A)} = \{0\}$.) De plus, A est trigonalisable car $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, d'où A est semblable à une matrice triangulaire T et les élements diagonaux de T (et par suite aussi ceux de T^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) sont tous nuls car ce sont les valeurs propres de A. D'où $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T^2) = \cdots = \mathrm{tr}(T^n) = 0$, donc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$.

2. Supposons que $\mathrm{tr}(A) = \cdots = \mathrm{tr}(A^{n-1}) = 0$.
   On constate que, dans le raisonnement précédent, les r équations $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^r) = 0$ ont suffi. La conclusion « A est nilpotente » reste donc valable si $r \leq n - 1$. Si, au contraire, $r = n$, alors : la matrice A possède n valeurs propres distinctes deux à deux, or elle est de taille n, donc elle est diagonalisable.