Corrigé de la colle n° 05

Intégrales & structures

11 octobre 2024

Exercice 1. Soit l'intervalle $I =]-1,+1[$. Pour chaque $(x,y) \in I^2$, on définit le réel

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in I^2,\ x * y \in I$.
2. Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.
3. Soit $a \in [0,1[$. Vérifier que $A = [a,1[$ est stable par la loi $*$.
   L'ensemble $(A,*)$ est-il un sous-groupe de $(I,*)$?
4. Montrer que la fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to I$ est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque th^{-1}.
5. Montrer que th est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers le groupe $(I,*)$.

---

1. Soit $(x,y) \in I^2$:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{1+xy} < 1 &\iff x+y < 1+xy \quad \text{en multipliant par } 1+xy>0 \\ &\iff 0 < 1-x-y+xy. \end{aligned}$$

   Or $1-x-y+xy = (1-x)\cdot(1-y) > 0$. D'où $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ et, de même, $-1 \leq \frac{x+y}{1+xy}$. Donc $\boxed{* \text{ est une loi de composition interne}}$

   Autre méthode — Soit $x \in I$. On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$. L'application f est dérivable et $\forall y \in]-1,+1[,\ f'(y) = \frac{1+xy-x^2-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} > 0$. L'application f est continue et strictement croissante, d'où $f(]-1,1[) = [f(-1), f(1)]$. Or $f(-1) = \frac{x-1}{1-x} = -1$ et $f(1) = \frac{x+1}{1+x} = 1$. Donc $f(I) \subset I$ pour tout $x \in I$.

2. Soit $(x,y,z) \in I^3$:

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= \tfrac{x*y+z}{1+(x*y)z} \\ &= \tfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} \\ &= \tfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \\ &= \tfrac{x(1+yz)+y+z}{(1+yz)+x(y+z)} \\ &= \tfrac{1+yz}{1+yz}\,\tfrac{x(1+yz)+y+z}{(1+yz)+x(y+z)} \\ &= \tfrac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \tfrac{x+y*z}{1+x(y*z)} \\ (x*y)*z &= x*(y*z) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{* \text{ est associative}}$

3. La loi $*$ est commutative car $\forall(x,y)\in I^2,\ x*y=y*x$.
   0 est l'élément neutre de $*$ car, pour tout $x\in I$, $x*0=\frac{x+0}{1+x\times 0}=x$.
   Tout élément x de I possède un inverse car $-x\in I$ et $x*(-x)=\frac{x-x}{1+x(-x)}=0$. D'où $-x$ est l'inverse de x.
   Enfin la loi $*$ est associative car, pour tout $(x,y,z)\in I^3$:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= \frac{x*y+z}{1+(x*y)z}\\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z}\\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}\\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{(1+yz)+x(y+z)}\\ &= \frac{1+yz}{1+yz}\,\frac{x(1+yz)+y+z}{(1+yz)+x(y+z)}\\ &= \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}}\\ &= \frac{x+y*z}{1+x(y*z)}\\ (x*y)*z &= x*(y*z)\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{(I,*) \text{ est un groupe commutatif}}$

4. Nous avons vu que l'application $f:\ y\mapsto x*y$ est croissante sur $[-1,1]$.

   D'où $\forall(x,y)\in A^2,\ \frac{x+y}{1+xy}\geq\frac{x+0}{1+0x}\geq x\geq a$. Donc $\boxed{A \text{ est stable par } *}$

   Non, l'ensemble $(A,*)$ n'est pas un sous-groupe de $(I,*)$ car il existe $x\in A$ tel que $-x\neq A$.

5. La fonction th est dérivable car c'est le quotient de deux fonctions dérivables et car son dénominateur ne s'annule pas.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x)=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$. Donc $\boxed{\text{la fonction th est strictement croissante}}$

   $\mathrm{th}(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+1$ et, parce que la fonction th est impaire, $\mathrm{th}(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-1$
   Première méthode — La fonction $\mathbb{R}\to I,\ x\mapsto\mathrm{th}(x)$ est bijective d'après la question 5 : injective car elle est strictement monotone et surjective car $\mathrm{th}(\mathbb{R})=]\lim\limits_{-\infty}\mathrm{th},\lim\limits_{+\infty}\mathrm{th}[=I$ car th est strictement croissante et continue. La deuxième méthode sera meilleure car elle permettra non seulement de montrer que th est bijective mais aussi de déterminer l'expression de th^{-1}.
   Deuxième méthode — Soient $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}y=\mathrm{th}(x) &\iff \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=y\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}-1=y\cdot(\mathrm{e}^{2x}+1)\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}\cdot(1-y)=1+y\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}=\frac{1+y}{1-y}\quad\text{car } x\neq-1\\ &\iff 2x=\ln\frac{1+y}{1-y}\quad\text{car } 1+y>0 \text{ et } 1-y>0\\ &\iff x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.\end{aligned}$$

   Donc th est bijective et $\mathrm{th}^{-1}(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ pour tout $y\in]-1,1[$.

6. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: d'après la question précédente, les réels $\mathrm{th}(x)$ et $\mathrm{th}(y)$ appartiennent à I. De plus

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x)*\mathrm{th}(y) &= \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}\\ &= \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}\\ &= \frac{(e^{x+y}-e^{-x+y}+e^{x-y}-e^{-x-y})+(e^{y+x}-e^{-y+x}+e^{y-x}-e^{-x-y})}{(e^{x+y}+e^{-x+y}+e^{x-y}+e^{-x-y})+(e^{x+y}-e^{-x+y}-e^{x-y}+e^{-x-y})}\\ &= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}\\ &= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+e^{-x-y}}\\ &= \mathrm{th}(x+y)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{th est un morphisme du groupe } (\mathbb{R},+) \text{ vers le groupe } (I,*)}$. Et c'est un isomorphisme car th est bijective.

Exercice 2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ converge.
2. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Démontrer que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$
3. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

---

1. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$, on la coupe l'intervalle en deux morceaux $]0,1]$ et $[1,+\infty[$. L'intégrale convergera si, et seulement si, les intégrales sur chaque morceau convergent.
En $+\infty$, $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, d'où l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ converge.
En 0, $e^{-at}-e^{-bt} = (b-a)t + o(t)$ car $e^{-at} = 1 - at + o(t)$ et $e^{-bt} = 1 - bt + o(t)$. D'où $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} (b-a)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (b-a)\,dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ converge.
2.
$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt &= \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}dt \\
&= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= \left(\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}dt\right) - \left(\int_{bx}^{ay} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt\right) \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt
\end{aligned}$$
3. Pour tout $z > 0$ et pour tout $t \in [az, bz]$, on a :
$$\begin{array}{rcccc}
 & \dfrac{e^{-bz}}{t} & \leq & \dfrac{e^{-t}}{t} & \leq & \dfrac{e^{-az}}{t} \\
\text{d'où} & \displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t} & \leq & \displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} & \leq & \displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t} \\
\text{d'où} & e^{-bz}\ln\left(\frac{b}{a}\right) & \leq & \displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} & \leq & e^{-az}\ln\left(\frac{b}{a}\right).
\end{array}$$
On en déduit que :
$$e^{-bx}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - e^{-ay}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \leq e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - e^{-by}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
En faisant tendre successivement x vers 0 et y vers $+\infty$, on obtient le résultat voulu.

Exercice 3 (Nombre de diviseurs d'un entier – oral X ENS PSI 2011)**.**

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon.

1. Montrer que $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.

2. Soit s_n la somme des n^2 éléments de la matrice A_n. Déterminer un équivalent de s_n.
3. Soit d_n le nombre des diviseurs de n. Montrer que $d_1 + \cdots + d_n \sim n \ln n$.

---

1. La somme $k = a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est le nombre d'entiers $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i|j$, c'est-à-dire le nombre de multiples de i compris dans $[\![1, n]\!]$. On cherche donc l'entier k tel que $i, 2i, \ldots, ki$ sont $\leqslant n$ et $n < (k+1)i$, ou encore $k \leqslant \frac{n}{i} < n+1$. Par définition de la partie entière, on obtient
$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$
2. On note H_n le n-ième nombre harmonique $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. En effectuant une somme par lignes, la première question montre que $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Comme $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $nH_n - n \leqslant s_n \leqslant nH_n$. Or $H_n \sim \ln n$ (il s'agit d'une comparaison série-intégrale appliquée à la fonction continue et décroissante $t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$) et on en déduit que
$$s_n \sim n \ln n.$$
3. On peut aussi calculer s_n en effectuant une somme par colonnes. Tout d'abord, la définition des $a_{i,j}$ montre que $a_{1,j} + \cdots + a_{n,j}$ est le nombre des diviseurs de j compris entre 1 et n, c'est-à-dire le nombre d_j des diviseurs de j (car $j \leqslant n$). Alors $s_n = \sum_{j=1}^{n} d_j$.

Le quotient $\frac{s_n}{n}$ est le nombre moyen de diviseurs d'un entier dans $[\![1, n]\!]$.
Le résultat démontré dit que ce nombre moyen est équivalent à $\ln(n)$.