Programme de la colle n° 6

Semaine du 04/11/2024

Réduction ▷ **Chapitre IV & TD n° 4** :

- vecteurs propres, sous-espaces propres, valeurs propres et spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- un endomorphisme u est injectif *ssi* $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$;
- les racines du polynôme caractéristique χ_A sont les valeurs propres de la matrice carrée A et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ 1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda \ ;$$
- si χ_A est scindé, alors $\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda$ et $\det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}$;
- déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- les SEP sont en somme directe ;
- une matrice carrée A est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses *sep* égale la taille de la matrice, ssi χ_A est scindé et la dimension de chaque *sep* égale la multiplicité de la valeur propre, ssi ses SEP sont supplémentaires ;
- une matrice carrée de taille n est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes deux à deux ;
- une matrice carrée est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé ;
- trigonaliser une matrice carrée sous une forme donnée ;
- utiliser la diagonalisation ou la trigonalisation pour découpler et résoudre un système linéaire de suites défines par récurrence ou un système linéaire d'équations différentielles, à coefficients constants et sans second membre ;
- le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur de cette matrice (théorème de Cayley & Hamilton) et est donc divisible par le polynôme minimal ;
- si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), P(\lambda) = 0$ (autrement dit, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P) ;
- ~~le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal μ_u, qui a les mêmes racines que le polynôme caractéristique χ_u~~ ;
- ~~une matrice est trigonalisable ssi elle possède un polynôme annulateur scindé~~ ;
- ~~une matrice est diagonalisable ssi elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples~~ ;
- si deux endomorphismes commutent, alors les SEP de l'un sont stables par l'autre ;
- ~~le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un *sev* stable divise le polynôme caractéristique de u~~ ;
- ~~si un endomorphisme u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur un *sev* stable aussi~~ ;
- si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé, alors on peut définir ses sous-espaces caractéristiques et, d'après le lemme des noyaux, ces sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires. ~~Stabilité par u des SEC et dimension des SEC~~.