CORRIGÉ DU D.M. N° 3 DE MATHÉMATIQUES

Ce problème est extrait de EPITA - PSI - 2017.

Partie A

1) $\sin t \underset{0}{\sim} t$, donc $\boxed{\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, \pi]$, et l'intégrale de Riemann $\int_0^\pi \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 < 1$, donc, par équivalence des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } I(\alpha) \text{ converge si, et seulement si } \alpha < 2}$.

2) **a)** Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$ et, pour tout $t \geq \pi$, $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$.
Comme l'intégrale de Riemann $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge, par comparaison des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } J(\alpha) \text{ est absolument convergente si } \alpha > 1}$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t+\pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto |\sin t| \text{ est } \pi\text{-périodique}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application $u \mapsto t = u + k\pi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ vers $[k\pi, (k+1)\pi]$ et $dt = du$.
Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_0^\pi |\sin(u + k\pi)|\d{u} = \int_0^\pi \sin u\,du = [-\cos u]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = 2}$.

c) Soit $\alpha \geq 0$ et $k \geq 1$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, pour tout $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha}$, et donc $\frac{|\sin t|}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{k^\alpha \pi^\alpha}$.
Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt$,
Comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = 2$, on obtient : $\boxed{\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}}$.

d) On somme pour $k = 1$ à $n - 1$ et on obtient :
$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$, c'est-à-dire $\boxed{\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}}$.

— Si $\alpha \leq 1$, alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. La minoration précédente donne $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $J(\alpha)$.

— Si $\alpha > 1$, alors l'intégrale $J(\alpha)$ converge absolument d'après la question 2a.

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } J(\alpha) \text{ est absolument convergente si, et seulement si, } \alpha > 1}$.

3) **a)** Pour tout $x \geq \pi$, $\int_\pi^x \sin(t)\,dt = [-\cos t]_\pi^x = -\cos x - 1$ et cette quantité n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } J(0) \text{ est divergente}}$.

b) Soit $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq \pi$, $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable, d'après Riemann, sur $[\pi, +\infty[$.
Donc, par comparaison des fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt \text{ est absolument convergente}}$.

Soit $x \geq \pi$. On procède à une intégration par parties en posant $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.
Pour tout $t \geq \pi$, $|u(t)v(t)| = \left|\frac{\cos t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ converge.

Le théorème d'intégration par parties assure alors $\boxed{\text{la convergence de l'intégrale } J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt}$.

4) L'intégrale $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent, c'est-à-dire si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 0$, i.e $\alpha \in]0, 2[$. Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de la fonction } f \text{ est }]0,2[}$.
L'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge absolument si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent absolument. Comme la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est positive sur $]0, \pi]$, l'intégrale $I(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si, elle est convergente. Donc l'intégrale $f(\alpha)$ est absolument convergente si, et seulement si $\alpha < 2$ et $\alpha > 1$. $\boxed{\text{Le domaine de convergence absolue de l'intégrale définissant } f(\alpha) \text{ est }]1,2[}$.

Partie B

5) **a)** On fait une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$.
Comme $u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, puisque $2 - \alpha > 0$, et que $K(\alpha)$ est une intégrale convergente d'après la partie I, on peut intégrer par parties :

$$K(\alpha) = \left[\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\right]_0^{\pi/2} + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt = \frac{1-0}{(\pi/2)^\alpha} - 0 + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

Donc $\boxed{K(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt}$.

b)
- La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0, \pi/2]$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq 0$.
- $\alpha + 1 \leq 2$ donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{t^2}$.
Comme, pour tout $t \in]0,1]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$, par croissance de l'intégrale.
- $\alpha + 1 \geq 0$ donc, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq 1$.
Comme, pour tout $t \in [1, \pi/2]$, $1 - \cos t \geq 0$, $\int_1^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_1^{\pi/2} (1 - \cos t)\, dt$, par croissance de l'intégrale.

D'autre part, la relation de Chasles donne $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \d{t} + \int_1^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t))\, dt}$$

c) Notons M le majorant (indépendant de α) de l'encadrement précédent. Alors :

$$\forall \alpha \in]0, 1], \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \leq K(\alpha) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha M$$

Comme $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(2/\pi)} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ et $\alpha M \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure : $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} K(\alpha) = 1}$.

6) **a)** On pose $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Comme u est bornée et $v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui rend légitime une première intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = 0 - 0 - \alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt = -\alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

On pose à nouveau $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = -\frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}}$. Comme x est bornée et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $x(t)y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui légitime une seconde intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = -\alpha \left(0 - \frac{1}{(\pi/2)^{\alpha+1}} + (\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt\right)$$

On a obtenu : $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt}$.

b) — L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent :

$$\left|\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\,dt\right| \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^{\alpha+2}},\,dt \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+2}}$$

et le dernier membre est égal à $\alpha(\alpha+1)\left[-\frac{1}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}}\right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}$ Comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut, par le théorème des gendarmes, que $\boxed{\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\,dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

— D'après la question précédente, comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut que $\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^{\alpha}}\,dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

c) Par opérations, $\boxed{f(\alpha) \text{ admet une limite finie quand } \alpha \to 0 \text{ égale à } 1+0=1}$.

Partie C

7) **a)** Soit $\alpha \in]0,2[$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et :

— $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{2t^{\alpha-1}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ d'après Riemann, puisque $\alpha - 1 < 1$.

— Pour tout $t \geq 1$, $h(t) \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après Riemann, puisque $\alpha+1 > 1$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \text{ converge si } 0<\alpha<2}$.

b) Les fonctions $u : t \mapsto 1-\cos t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $u' : t \mapsto \sin t$ et $v' : t \mapsto -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et :

— $u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, puisque $2-\alpha > 0$.

— $t \mapsto 1-\cos t$ est bornée, donc $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^\alpha}) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $\alpha > 0$.

Comme l'intégrale $f(\alpha)$ converge et que le produit uv admet des limites finies aux bornes de $]0,+\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$f(\alpha) = 0 - 0 + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

On a obtenu : $\boxed{\text{pour } 0<\alpha<2,\ f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt}$.

c) Comme la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0,+\infty[$ et $\alpha > 0$, par positivite de l'intégrale, f est positive sur $]0,2[$. Si f s'annulait en $\alpha \in]0,2[$, alors la fonction continue et positive $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ serait d'intégrale nulle, donc identiquement nulle sur $]0,+\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{f \text{ est à valeurs strictement positives sur }]0,2[}$.

8) **a)** La fonction φ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{elle est prolongeable en une fonction continue sur } \mathbb{R}}$, en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $t \in]0,\pi]$, $\cos t < 1$, donc φ est strictement positive sur $]0,\pi]$ et, $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Par conséquent φ est strictement positive sur $[0,\pi]$.
Etant continue sur le segment $[0,\pi]$, la fonction φ est bornée et atteint ses bornes sur $[0,\pi]$, donc $\boxed{\varphi \text{ admet sur } [0,\pi] \text{ un minimum } \mu > 0}$ car la fonction φ est strictement positive.

c) Comme $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0,+\infty[$, d'après la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale :

$$f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \geq \alpha\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt = \alpha\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t^{\alpha-1}}\,dt \geqslant \alpha\mu\left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^{\pi} = \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

On a obtenu, pour $0<\alpha<2$, $\boxed{f(\alpha) \geqslant \alpha\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}}$.

d) $\alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \alpha\mu\frac{\mathrm{e}^{(2-\alpha)\ln\pi}}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\sim} \frac{2\mu}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par minoration, $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty}$.