Colle n° 06

Réduction

Exercice 1. Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension 3 et f l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses éléments propres, c'est-à-dire ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. (On notera j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$.)
2. Soient (x, y, z) un triplet de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $A = P(J)$. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et déterminer son spectre en utilisant le polynôme P.
3. Montrer les valeurs propres de A sont toutes réelles si, et seulement si, $y = z$.

Exercice 2. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. En déduire qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (Vous avez bien lu ? c'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?