Colle 06 Réduction

DEPRES Adrien

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.
   (a) Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ. Démontrer les inclusions
   $$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$
   (c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?
   (d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.
   (a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que
   $$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$
   Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?
   (c) Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
   (d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Solution **1.**
1.a *On remarque que* $AB = A(BA)A^{-1}$ *et donc* AB *et* BA *sont semblables :* AB *et* BA *ont le même polynôme caractéristique.*

1.b *Soit* $x \in E_\lambda$*, c'est-à-dire que* $f \circ g(x) = \lambda x$*. On a*

$$g \circ f\big(g(x)\big) = g\big(f \circ g(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$*, et donc que* $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$*. De même, on montre que* $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$*.*
1.c f *et* g *étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :*

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ *et* F_λ *ont même dimension.*
1.d *Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *les valeurs propres de* $f \circ g$*. Alors, puisque* $f \circ g$ *est diagonalisable, on a*

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ *est (au moins) égale à* n*. C'est bien que* $g \circ f$ *est diagonalisable.*
2.a *Si* 0 *est valeur propre de* $f \circ g$*, alors* $\det(AB) = 0$*. Mais* $\det(AB) = \det(BA) = 0$*, et donc* 0 *est valeur propre de* $g \circ f$*.*
2.b *On utilise la relation suivante :*

$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$

Développant, on trouve :

$$\begin{aligned}
(BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\
&= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\
&= \alpha I.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ *est non-nul, puisque*

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ *est inversible.*
2.c *On raisonne par contraposée. Si* α *n'est pas une valeur propre de* $f \circ g$*, alors* $AB - \alpha I$ *est inversible, et par la question précédente,* $BA - \alpha I$ *est inversible, c'est-à-dire que* α *n'est pas une valeur propre de* $g \circ f$*. Par contraposée, toute valeur propre de* $g \circ f$ *est une valeur propre de* $f \circ g$*. Par symétrie du rôle joué par* f *et* g*,* $f \circ g$ *et* $g \circ f$ *ont les mêmes valeurs propres.*
2.d *On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA *est diagonalisable, tandis que* AB *ne l'est pas.*

LANDREAU Félix

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul.
Soit A une matrice carrée réelle de taille n.
On note I la matrice identité de taille n.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour toute matrice carrée C de taille n :
   $\det \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-C)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
3. Préciser le spectre de B en fonction de celui de A
4. Préciser les sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A
5. On suppose que A est diagonalisable. B est-elle diagonalisable ?
6. On définit une suite de matrices de la façon suivante :
   La matrice A_0 est la matrice nulle de taille 1 : $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice A_k étant définie, de taille 2^k, on pose :
   $A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & I_k \\ I_k & A_k \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice identité, de taille 2^k.
   Montrer que la matrice A_k est diagonalisable et préciser son spectre.

Solution **2.**

1. *On calcule*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & C \\ A+C & A \end{pmatrix}$$

   puis

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+C & C \\ A+C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & C \\ 0 & A-C \end{pmatrix}$$

   On en déduit

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+C & C \\ 0 & A-C \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-C)$$

2. $P_B(X) = P_A(X+1)P_A(X-1)$.
3. $Sp(B) = \{\mu-1, \mu+1 ; \mu \in Sp(A)\}$.
4. *Soit* $\lambda \in Sp(B)$ *:*$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *est dans* $E_\lambda(B)$ *ssi :* $\begin{cases} A(X+Y) = (\lambda-1)(X+Y) \\ A(X-Y) = (\lambda+1)(X-Y) \end{cases}$.
   On obtient $E_\lambda(B) = \{\begin{pmatrix} U+V \\ U-V \end{pmatrix} ; (U,V) \in E_{\lambda-1}(A) \times E_{\lambda+1}(A)\}$.
   Avec la convention : $E_\mu(A) = \{0\}$ *quand* μ *n'est pas valeur propre.*
5. *Si* A *est diagonalisable :*
   -> P_B *est scindé (question* 2*).*
   -> Il reste à vérifier l'égalité de la dimension des sous-espaces propres avec l'ordre de multiplicité :
   . $\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda-1}(A) + \dim E_{\lambda+1}(A)$ *(avec l'isomorphisme* $(U,V) \to \begin{pmatrix} U+V \\ U-V \end{pmatrix}$.
   . On tire l'ordre de multiplicité de la question 2 *:*
   $\alpha_\lambda(B) = \alpha_{\lambda+1}(A) + \alpha_{\lambda-1}(A)$.
6. *Par récurrence :* A_k *est diagonalisable et* $Sp(A_k) = \{k-2i, i = 0 \ldots k\}$.

WIMMER Alexander

Exercice 3. Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PM - MP$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer la trace de f.

Exercice 4. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$. On suppose que $MN = 0$ et que $M + M^T$ est inversible.

1. Montrer que M et N ont un vecteur propre commun.
2. Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Solution **3.** *On étudie l'endomorphisme canoniquement associé* $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto p \circ u - u \circ p$ *où* p *est le projecteur sur* F *parallèlement à* G *avec* $\mathbb{R}^n = F \oplus G$. *Dans une base adaptée, on se ramène à étudier l'endomorphisme*

$$\widetilde{f} : M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{cases} E_0(\widetilde{f}) = \operatorname{vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \cup [\![n-r;n]\!]^2\right. \\ E_1(\widetilde{f}) = \operatorname{vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![n-r;n]\!] \times [\![1,r]\!]\right. \\ E_{-1}(\widetilde{f}) = \operatorname{vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![n-r;n]\!]\right. \end{cases}$$

Par dimension, l'endomorphisme est bien diagonalisable et sa trace qui vaut la somme des valeurs propres comptées avec mulitplicité vaut zéro.

Solution **4.**

1. *Si la matrice* N *admet une valeur propre* $\lambda \neq 0$ *et si* $X \in E_\lambda(N) \setminus \{0\}$, *alors la condition* $MN = 0$ *nous dit que* $X \in \ker M$. *Donc* M *et* N *ont bien un vecteur propre commun.*
   Si le spectre de N *est réduit à* $\{0\}$, *alors* N *est nilpotente. Suppposons* $N \neq 0$, *alors il existe* $X \neq 0$ *et* $k \geq 2$ *tels que* $N^{k-1}X \neq 0$ *et* $N^k(X) = 0$. *Par hypothèse* $MN^{k-1}X = 0$ *et donc* $N^{k-1}X$ *est un vecteur propre commun à* M *et* N. *La dimension impaire n'intervient pas ici.*
2. *Remarquons que la dimension impaire devient ici indispensable comme le montre le cas* $n = 2$ *: si* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $MN = 0$ *et les matrices* $M + M^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $N + N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont inversibles.*
   En effet, on a $\operatorname{Im} N \subset \ker M$. *Si* $\operatorname{rg} N \geq n+1$, *alors par thérème du rang,* $\operatorname{rg} M \leq n$, *mais alors* $\operatorname{rg} M + \operatorname{rg} M^T \leq 2n$, *ce qui contredit* $M + M^T$ *inversible.*
   Donc $\dim \ker N = \dim \ker N^T \geq n+1$. *La formule de Grassman nous dit que* $\dim(\ker N \cap \ker N^T) \geq 1$ *et donc* $N + N^T$ *n'est pas inversible.*