Feuille de T.D. n° 5

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto n^k x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$?

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1}. En déduire la limite de (u_n).
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

Exercice 5 (convergence dominée)**.**

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$
est une intégrale convergente.
2. Montrer que la suite des fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.

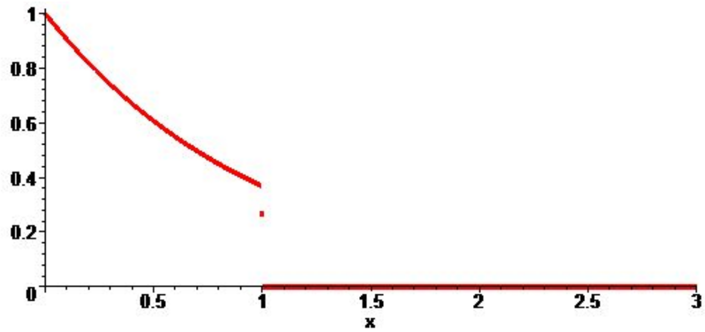

FIGURE 1 – LA LIMITE f DE LA SUITE DES FONCTIONS $f_n \,:\, [0,+\infty[\to,\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}$.

3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 6. 1. La fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,dt$ est appelée la **fonction Gamma d'Euler**.
Montrer que le réel $\Gamma(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.

2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } \ t \in]0,n[\\ 0 \text{ si } \ t \geq n \end{cases}$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$: vers quelle fonction f ?
3. Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ converge pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et que
$$I_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$
4. Soit $x > 0$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$ converge et que
$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$
En déduire une expression de $J_n(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.
5. Soit $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = n^x\, J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire **l'identité d'Euler** :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Exercice 7. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.