Corrigé du D.M. n° 4 de mathématiques

28 octobre 2024

CCP MP 2001 Math II

Remarque : l'entier naturel n sera supposé non nul.

Partie I

1. En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$. Donc $\boxed{\text{la matrice } C_P \text{ est inversible si, et seulement si, } P(0) \neq 0}$

2. Soit $x \in \mathbb{K}$. On ne change pas le déterminant en remplaçant la première ligne L_0 par $L_0 + xL_1 + \cdots + x^{n-1}L_{n-1}$ puis on développe en suivant cette nouvelle première ligne pour obtenir : $\boxed{\chi_{C_P} = (-1)^n P}$

3. Si $Q = \chi_A$ alors $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Réciproquement, si $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$, alors posons $P = (-1)^n Q$: $Q = \chi_{C_P}$ d'après [**2**]. Donc

$\boxed{\text{il existe } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } Q = \chi_A \text{ si, et seulement si, } Q \text{ a pour terme de plus haut degré } (-1)^n X^n}$

4. (a) Le déterminant de toute matrice est égal à celui de sa transposée, or ${}^tC_P - xI_n = {}^t(C_P - xI_n)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, d'où $\chi_{{}^tC_P} = \chi_{C_P}$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}({}^tC_P) = \mathrm{Sp}(C_P)}$

   (b) Soit $X = {}^t(x_1 \cdots x_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left({}^tC_P - \lambda I_n\right) \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda x_1 = x_2 \\ \lambda x_2 = x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} = x_n \\ \lambda x_n = -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases} \quad \text{car } P(\lambda) = 0$$

donc $\boxed{\operatorname{Ker}\left({}^tC_P - \lambda I_n\right) = \operatorname{Vect}\left({}^t(1\,\lambda\,\cdots\,\lambda^{n-1})\right)}$

(c) Si le polynôme P est scindé à racines simples alors $\chi_{{}^tC_P}$ aussi d'après la question [**2**] et la matrice ${}^tC_P$, de taille n, possède donc n valeurs propres distinctes deux à deux : c'est une condition suffisante pour qu'elle soit diagonalisable.

Réciproquement : si ${}^tC_P$ est diagonalisable, alors la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n. Or la dimension de chaque sous-espace propre vaut 1 d'après [**b**], donc la matrice ${}^tC_P$ possède n valeurs propres distinctes deux à deux, qui sont des racines du polynôme $\chi_{{}^tC_P}$. Or ce polynôme est de degré n, donc $\chi_{{}^tC_P}$ est scindé à racines simples, donc P aussi. Ainsi

$\boxed{{}^tC_P \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } P \text{ est scindé à racines simples}}$

(d) ◇ Puisque $\deg P = n$, si P a n racines deux à deux distinctes alors P est scindé à racines simples et [**c**] prouve que $\boxed{{}^tC_P \text{ est diagonalisable}}$

◇ La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_1^{n-1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\ \lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ est formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux. Elle est donc libre, d'où $\boxed{\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix} \neq 0}$

5. (a) Prenons $\boxed{n = 2002, \quad P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999 \quad \text{et} \quad A = C_P}$

Alors $\chi_A = P$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $P(A) = 0$.

D'AUTRES SOLUTIONS : Comme $P(0) < 0$ et $P(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, le polynôme P a au moins une racine α dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{K}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A = \alpha\, I_n$ est aussi une solution de l'équation.

(b) Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur e tel que $f^{n-1}(e) \neq 0_E$. Posons, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = f^{k-1}(e)$ et montrons que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E : si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$, alors

$f^{n-1}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = 0_E$, $f^{n-2}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = 0_E$, $\cdots$, $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = 0_E$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$, d'où

$$\begin{cases}\lambda_1 f^{n-1}(e) = 0_E\\ \lambda_1 f^{n-2}(e) + \lambda_2 f^{n-1}(e) = 0_E\\ \vdots\\ \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0_E\\ \lambda_1 e + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(e) = 0_E\end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0_E$. D'où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E, de cardinal $n = \dim E$, donc c'est une base de E. De plus, pour chaque $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$f(e_k) = f^k(e) = e_{k+1}$ et $f(e_n) = f^n(e) = 0_E$. Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_{X^n}}$

Partie II

6. $\lambda X = AX$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ donc, par l'inégalité triangulaire, $\left|\lambda x_i\right| = \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|a_{ik}\right| \left|x_k\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|a_{ik}\right| \|X\|_\infty$ donc $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left|\lambda x_i\right| \leq r_i \left\|X\right\|_\infty}$

7. En appliquant le résultat de [**6**] à i_0 tel que $\left|x_{i_0}\right| = \left\|X\right\|_\infty$, on obtient l'inégalité $\left|\lambda\right| \left\|X\right\|_\infty \leq r_{i_0} \left\|X\right\|_\infty$. Or $X \neq 0$ car X est un vecteur propre, on peut donc diviser par $\left\|X\right\|_\infty > 0$ pour obtenir l'inégalité $\left|\lambda\right| \leq r_{i_0}$, donc $\lambda \in D_{i_0}$. Ainsi $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \exists i_0 \in [\![1,n]\!], \quad \lambda \in D_{i_0}$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k}$

   Remarque : Le théorème de Hadamard sur les matrices à diagonale strictement dominante ▷ **exo 20 du TD 2** est en lien avec les disques D_i, appelés disques de Gershgorin ▷ **http ://citron.9grid.fr/docs/gerschgorin.pdf**

8. On a vu au [**2**] que les racines de P sont les valeurs propres de C_P et on peut appliquer [**7**] à $A = C_p$ avec $r_1 = \left|a_0\right|$ et pour $i \in [\![2,n]\!]$, $r_i = 1 + \left|a_{i-1}\right|$. Or, $\bigcup_{k=1}^n D_k$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max_{1\leq i\leq n} r_i$, donc $\boxed{\text{toutes les racines de } P \text{ appartiennent disque fermé de centre 0 et de rayon } R}$

9. Sans perte de généralité, supposons que $a = \max\{a,b,c,d\}$. Si un entier $n \in \mathbb{N}$ est une solution de l'équation proposée, alors il est une racine du polynôme $P = X^a + X^b - X^c - X^d \in \mathbb{C}_a[X]$ donc, avec les notations de [**8**], $|n| \leq R$ avec $R = 2$ car $\left|a_0\right| = 0$ et $1 + \left|a_k\right| = \begin{cases} 2 \text{ si } k \in \{b,c,d\} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$. Or 2 n'est pas une solution car, par l'absurde : si 2 est une solution, alors, en supposant, par exemple, $c > d$, $2^b\left(2^{a-b}+1\right) = 2^d\left(2^{c-d}+1\right)$ donc, par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers, $b = d$ ce qui est absurde. Par ailleurs 0 et 1 étant des solutions, on peut conclure que : $\boxed{\text{les uniques solutions } n \in \mathbb{N} \text{ de } n^a + n^b = n^c + n^d \text{ sont 0 et 1}}$

   Autre méthode : Si $n \neq 0$ est une solution de l'équation, alors, en notant $m = \min\{a,b,c,d\}$: $n^{a-m} + n^{b-m} = n^{c-m} + n^{d-m}$ d'où $1 \equiv 0\,[n]$, donc $n = 1$.

Partie III

10. Soit $\forall n,\ u(n) = \lambda^n$: alors $\forall n,\ u(n+p) + a_{p-1}u(n+p-1) + \cdots + a_0u(n) = \lambda^n\left(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0\right) = \lambda^n P(\lambda)$. Donc $\boxed{\text{la suite } n \mapsto \lambda^n \text{ appartient à } F \text{ si } \lambda \text{ est une racine de } P}$

11. ◇ L'application φ est linéaire et, en posant $\alpha = \big(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}\big) \in \mathbb{C}^p$, il existe une et une seule suite $u \in F$ telle que $\varphi(u) = \alpha$: c'est la suite définie par les conditions initiales $u(0) = \alpha_0$,… $u(p-1) = \alpha_{p-1}$ et par la relation de récurrence $u(n) = -a_{p-1}u(n-1) - \cdots - a_0 u(n-p)$ pour tout $n \geq p$. Donc φ est bijective.

◇ Donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } F \text{ vers } \mathbb{C}^p}$ d'où $\dim F = \dim \mathbb{C}^p$, donc $\boxed{\dim F = p}$

12. (a) $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \cdots - a_i e_i(i) - \cdots - a_0 e_i(0)$ donc $\boxed{e_i(p) = -a_i}$

(b) Notons $\big(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\big)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$: $e_i = \varphi^{-1}\big(\varepsilon_{i+1}\big)$ donc la famille $\big(e_0, \dots, e_{p-1}\big)$ est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base $\big(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\big)$. Ainsi $\boxed{\big(e_0, \dots, e_{p-1}\big) \text{ est une base de } F}$

(c) $\forall u \in F,\ u = \varphi^{-1}\big[\varphi(u)\big] = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=0}^{p-1} u(i)\,\varepsilon_{i+1}\right] = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\,\varphi^{-1}\big(\varepsilon_{i+1}\big)$ donc $\boxed{\forall u \in F,\ u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\,e_i}$

13. D'une part $\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$, d'autre part : si $u \in F$, alors $\forall n,\ u(n+1+p) = -a_{p-1}u(n+1+p-1) - \cdots - a_0 u(n+1)$ d'où $f(u)(n+p) = -a_{p-1}f(u)(n+p-1) - \cdots - a_0 f(u)(n)$ donc $f(u) \in F$ ce qui montre que $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

14. Pour tout $u \in F$, $f(u) \in F$ donc [**12.c**] donne $f(u) = \sum_{k=0}^{p-1} f(u)(k)\,e_k = \sum_{k=0}^{p-1} u(k+1)\,e_k = \sum_{k=0}^{p-2} u(k+1)\,e_k + u(p)\,e_{p-1} = u(1)\,e_0 + \sum_{k=1}^{p-1} u(k)\,e_{k-1} + u(p)\,e_{p-1}$. En particulier, $f(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} - a_i\,e_{p-1} \text{ si } 1 \leq i \leq p-1 \\ -a_0\,e_{p-1} \text{ si } i = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_0,\dots,e_{p-1})}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} \end{pmatrix} = {}^tC_P}$

15. Remarque : L'hypothèse "non nulles" ne sert pas, ce qui autorisera l'application de cette question à la question [**16**].

(a) D'après [**4.d**], une base de vecteurs propres de la matrice ${}^tC_P$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_0^{p-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{p-1} \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}\right)$ donc une base de vecteurs propres de l'endomorphisme g est $(v_0, \dots, v_{p-1})$ avec $v_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k\,e_k$: $n \mapsto \lambda_i^n$. Donc $\boxed{\text{une base de vecteurs propres de } g \text{ est } (v_0, \dots, v_{p-1}) \text{ avec } \forall n,\ v_i(n) = \lambda_i^n}$

(b) D'où $\forall u \in F,\ \exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p,\ u = \sum_{i=0}^{p-1} k_i\,v_i$ donc $\boxed{\exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u(n) = \sum_{i=0}^{p-1} k_i\,\lambda_i^n}$

16. Ici, $P = X^3 - (a+b+c)\,X^2 + (ab+ac+bc)\,X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$ avec a, b, c distincts deux à deux donc [**15**] donne : une base de F est $\Big((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, (b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (c^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$

Partie IV

17. Si $n = 1$, alors $A = C_A$. Si $n \geq 2$, alors les matrices A et C_A ne sont pas toujours semblables car $\mathrm{rg}(C_A) \geq n-1$ donc, si $\mathrm{rg}(A) < n-1$ alors A n'est pas semblable à C_A.
AUTRE MÉTHODE : On peut aussi, selon [**4.c**], prendre A diagonalisable mais avec une valeur propre au moins double.

18. Si $(**)$, alors $U - V = P^{-1}\,(C_U - C_V)\,P$. Or, les $(n-1)$ premières colonnes de $C_U - C_V$ sont nulles donc $\mathrm{rg}(C_U - C_V) \leq 1$ et, par l'absurde : si $\mathrm{rg}(C_U - C_V) = 0$, alors $C_U - C_V = 0$ donc $U - V = 0$ ce qui est absurde (car U et V sont distinctes) donc $\mathrm{rg}(C_U - C_V) = 1$. Donc $\mathrm{rg}(U - V) = 1$. Donc $(**) \Longrightarrow (*)$

19. $U = I_2, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient (*) mais pas (**) et $\mathrm{pgcd}\big(\chi u, \chi v\big) = (X-1)^2$ car la matrice $U - V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\chi_U = \chi_V = (X-1)^2$, donc $C_U = C_V$. Si (**) était vrai, alors la matrice U serait égale à V, ce qu'elle n'est pas. Enfin, les matrices U et V sont bien inversibles.

20. $\mathrm{rg}(u - v) = \mathrm{rg}(U - V) = 1$ et le théorème du rang donne $\dim\big(\mathrm{Ker}(u-v)\big) = n - 1$: donc H est un hyperplan de E

21. (a) Par l'absurde : si $F \subset H$, alors $\forall x \in F,\ (u-v)(x) = 0_E$ d'où $\forall x \in F,\ u(x) = v(x)$, donc $u_F = v_F$. D'où $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Posons $P = \chi_{u_F} = \chi_{v_F}$: $\deg P = \dim F \geq 1$ et P divise χ_u et χ_v ce qui contredit $\mathrm{pgcd}\big(\chi u, \chi v\big) = 1$. Donc $F \not\subset H$

(b) $\diamond$ D'où $F \neq F \cap H$ donc $\dim F > \dim(F \cap H)$ et donc $\dim(F+H) = \dim H + \dim F - \dim(F \cap H) > \dim H = n-1$ donc $\dim(F+H) = n$ et $F + H = E$

$\diamond$ Notons $p = \dim F$, $q = \dim F \cap H$ et $r = \dim H$. Soit $\mathcal{B}_{F\cap H} = \big(u_1, \ldots, u_q\big)$ une base du sous-espace vectoriel $F \cap H$. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{B}_{F\cap H}$ en une base $\mathcal{B}_F = \big(u_1, \ldots, u_q, v_{q+1}, \ldots, v_p\big)$ de F et en une base $\mathcal{B}_H = \big(u_1, \ldots, u_q, w_{q+1}, \ldots, w_r\big)$ de H. La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = \big(u_1, \ldots, u_q, v_{q+1}, \ldots, v_p, w_{q+1}, \ldots, w_r\big)$ est alors une base de $F + H = E$ donc : on a complété une base $\mathcal{B}_F$ de F par des vecteurs de H en une base $\mathcal{B}'$ de E

Autre rédaction : Soit G un supplémentaire de $F \cap H$ dans H. Alors $F \oplus G = F + H = E$. En concaténeant une base de F et une base de G, on a complété une base de F en une base de E par des vecteurs de H (car $G \subset H$).
$\diamond$ D'où $\mathcal{B}' = \big(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\big)$ avec $u_k \in H$ pour $k \geq p+1$. Or, si $x \in H$, alors $u(x) = v(x)$ et F est stable par u et par v donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} A_2 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \ .$$

Donc $\chi_C \mid \chi_U$, $\chi_C \mid \chi_V$ et $\deg(\chi_C) = n - p \geq 1$ puisque $F \neq E$, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}\big(\chi u, \chi v\big) = 1$.

Donc $\boxed{F = E}$

(c) $\{0_E\}$ et E sont stables par u et par v et on vient de montrer que : si F est stable par u et par v et $F \neq \{0_E\}$ alors $F = E$. Donc $\boxed{\text{les uniques sous-espaces stables par } u \text{ et par } v \text{ sont } E \text{ et } \{0_E\}}$

22. (a) Par définition, $G_j = (u^j)^{-1}(H)$ et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $u \in \mathrm{GL}(E)$ et donc $u^j \in \mathrm{GL}(E)$ donc $\dim G_j = \dim H$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N},\ G_j \text{ est un hyperplan de } E}$

(b) D'où $G_j = \mathrm{Ker}\varphi_j$ où φ_j est une forme linéaire non nulle sur E. Alors $\dim\left[\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\right] = \dim\left[\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{Ker}\varphi_j\right] =$ $n - \mathrm{rg}\big(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2}\big) \geq n - (n-1) = 1$. Donc $\boxed{\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0_E\}}$

(c) Par définition de l'entier p et du sous-espace vectoriel F, la famille de vecteurs $\big(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre tandis que la famille $\big(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y), u^p(y)\big)$ est liée donc il existe $\big(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}\big) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(y)$. Par l'absurde : supposons que $p \leq n-1$.
D'une part, le sous-espace vectoriel F est stable par u car $u^p(y) \in F$ donc $u(F) = \mathrm{Vect}\left\{u(y), u^2(y), \dots, u^p(y)\right\} \subset F$. D'autre part, $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $y \in G_k$ d'où $u^k(y) \in H$ donc $v\big(u^k(y)\big) = u\big(u^k(y)\big)$ donc, puisque $p - 1 \leq n - 2$, $v(F) = \mathrm{Vect}\left\{u(y), u^2(y), \dots, u^p(y)\right\} = u(F) \subset F$. Donc F stable par u et par v avec $1 \leq \dim F \leq n-1$, ce qui est absurde d'après [**21**]. Donc $\boxed{\mathcal{B}'' \text{ est une base de } E}$

(d) $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$ et le vecteur $u(e_{n-1})$ se décompose aussi dans la base $\mathcal{B}''$, donc il existe un polynôme P tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = C_P$. Mais alors, d'après [**2**], $P = (-1)^n \chi_u$, donc $C_P = C_U$. D'autre part, comme vu au [**c**], $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $v(e_k) = u(e_k) = e_{k+1}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v)$ est aussi une matrice compagnon et, de même que ci-dessus, c'est C_V. Donc

$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = C_U \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(v) = C_V}$

(e) En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}$, $U = P^{-1} C_U P$ et $V = P^{-1} C_V P$. On peut donc conclure que : $\boxed{\forall (U,V) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\big)^2, \quad \Big((*) \text{ et } \mathrm{pgcd}\left(\chi_U, \chi_V\right) = 1\Big) \Longrightarrow (**)}$

REMARQUE : on a utilisé l'hypothèse U inversible mais pas l'hypothèse V inversible. Par ailleurs, l'hypothèse $\text{pgcd}\big(\chi_U, \chi_V\big) = 1$ implique que U ou V est inversible car 0 ne peut alors être une racine commune à χ_U et à χ_V.

23. $(u, v) \in \big(\text{GL}\,(E)\big)^2$ (car $\chi_u(0) \neq 0$ et $\chi_v(0) \neq 0$), $\text{pgcd}\,\big(\chi_u, \chi_v\big) = 1$ (car si $P \mid \chi_u$ et $P \mid \chi_v$ alors $P \mid \chi_u - \chi_v = 2(-1)^n$) et $\text{rg}(u - v) = 1$. On peut donc appliquer le résultat de [**22**] à (u, v) : il existe une base $\mathcal{B} = \big(e_1, \ldots, e_n\big)$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = C_U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = C_V = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le sous-groupe G de $\text{GL}\,(E)$ engendré par u et v est l'ensemble des composées de u, v, u^{-1} et v^{-1}. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (ou en itérant les matrices C_U et C_V), $v^n = \text{id}_E$ et $u^n = -\text{id}_E$ d'où $u^{2n} = \text{id}_E$ et donc $v^{-1} = v^{n-1}$ et $u^{-1} = u^{2n-1}$. Donc G est l'ensemble des composées de u et v.
L'ensemble $X = \big\{e_1, \ldots, e_n, -e_1, \ldots, -e_n\big\}$ est de cardinal $2n$ (par liberté de la base $\mathcal{B}$) et est stable par u et v et par suite aussi par tout élément de G : $\forall w \in G,\ w(X) \subset X$. Et même $w(X) = X$ par injectivité de w. Ainsi toute application w de G induit une permutation σ_w de l'ensemble X.
De plus, l'application $w \mapsto \sigma_w$ est injective car l'ensemble X contient une base de l'espace vectoriel E, donc deux endomorphismes de E qui coïncident sur X sont égaux.

Comme $\text{card}\,\big(S(X)\big) = (2n)!$, le groupe G est fini et $\text{Card}\,\big(G\big) \leq (2n)!$

REMARQUE : Une application linéaire étant caractérisée par l'image d'une base, G est en bijection avec $G' = \Big\{\big(g(e_1), \ldots, g(e_n)\big) \;\Big|\; g \in G\Big\}$. Posons σ la permutation circulaire $(1, 2, \ldots, n)$ et montrons que $G' = G''$ où $G'' = \Big\{\big(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}, \ldots, \varepsilon_n e_{\sigma^k(n)}\big) \;\Big|\; k \in [\![0, n-1]\!],\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\Big\}$.
L'inclusion $G' \subset G''$ se montre par récurrence car

$$\big(w(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}), \ldots, w(\varepsilon_n e_{\sigma^k(n)})\big) = \big(\pm\varepsilon_1 e_{\sigma^{k+1}(1)}, \ldots, \pm\varepsilon_n e_{\sigma^{k+1}(n)}\big)$$

pour $w = u$ ou $w = v$ et que σ est d'ordre n.
Réciproquement, par récurrence sur k : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\big(v^k(e_1), \ldots, v^k(e_n)\big) = \big(e_{\sigma^k(1)}, \ldots, e_{\sigma^k(n)}\big)$ et $\big(u^k(e_1), \ldots, u^k(e_n)\big) = \big(e_{\sigma^k(1)}, \ldots, e_{\sigma^k(n-k)}, -e_{\sigma^k(n-k+1)}, \ldots, -e_{\sigma^k(n)}\big)$. Posons $g_k = v^k \circ u^{n-k}$ ($g_0 = -\text{Id}_E$, $g_n = \text{Id}_E$) , on a donc $\big(g_k(e_1), \ldots, g_k(e_n)\big) = \big(e_1, \ldots, e_k, -e_{k+1}, \ldots, -e_n\big)$ et donc, en posant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $h_k = g_{k-1} \circ g_k$, $\big(h_k(e_1), \ldots, h_k(e_n)\big) = \big(e_1, \ldots, e_{k-1}, -e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\big)$. On obtient ainsi $\big(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}, \ldots, \varepsilon_n e_{\sigma^k(n)}\big) = \big(g(e_1), \ldots, g(e_n)\big)$ en prenant $\alpha_i = \begin{cases} 0 \text{ si } \varepsilon_i = 1 \\ 1 \text{ si } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$ et $g = v^k \circ h_1^{\alpha_1} \circ \cdots \circ h_n^{\alpha_n}$

et on a $g \in G$. Donc $G'' \subset G'$ et, finalement, $\text{card}\,\big(G\big) = \text{card}\,\big(G''\big)$ donc $\text{card}\,\big(G\big) = n\,2^n$