Corrigé de la colle n° 06

Réduction

7 novembre 2024

Exercice 1. Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension 3 et f l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses éléments propres, c'est-à-dire ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. (On notera j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$.)
2. Soient (x, y, z) un triplet de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $A = P(J)$. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et déterminer son spectre en utilisant le polynôme P.
3. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes réelles si, et seulement si, $y = z$.

---

1. Le polynôme caractéristique de la matrice J est
$$\det(XI_3 - J) = \begin{vmatrix} X-0 & -1 & 0 \\ 0 & X-0 & -1 \\ -1 & 0 & X-0 \end{vmatrix} = X^3 - 1.$$
Les valeurs propres complexes de la matrice J sont donc les trois racines cubiques de l'unité : 1, j et j^2.
Trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres 1, j et j^2 sont respectivement (après calcul) :
$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$
Les sous-espaces propres associés sont donc les droites vectorielles $\mathrm{Ker}(1I_3 - J) = \mathrm{Vect}(V_0)$, $\mathrm{Ker}(jI_3 - J) = \mathrm{Vect}(V_1)$ et $\mathrm{Ker}(j^2I_3 - J) = \mathrm{Vect}(V_2)$.
Les trois vecteurs V_0, V_1 et V_2 forment une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car ils sont associés à des valeurs propres distinctes deux à deux (ou, pourquoi pas ? car le déterminant $\det(V_1, V_2, V_3)$ n'est pas nul).
2. La matrice J^2 s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $A(x, y, z) = xI_3 + yJ + zJ^2$.
3. Soit V un vecteur propre de J avec la valeur propre λ : $J \cdot V = \lambda \cdot V$. Alors $J^2 \cdot V = \lambda^2 \cdot V$, d'où $A(x, y, z) \cdot V = xI_3 \cdot V + yJ \cdot V + zJ^2 \cdot V = x \cdot V + y\lambda \cdot V + z\lambda^2 \cdot V = (x + \lambda y + \lambda^2 z) \cdot V$. Donc V est aussi un vecteur propre de la matrice $A(x, y, z)$ avec la valeur propre $x + \lambda y + \lambda^2 z$.
La matrice $A(x, y, z)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car les vecteurs V_0, V_1 et V_2 forment une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et sont des vecteurs propres de la matrice $A(x, y, z)$. Les valeurs propres de A sont
$$x + y + z \quad , \quad x + jy + j^2 z \quad \text{et} \quad x + j^2 y + (j^2)^2 z = x + jz + j^2 y.$$
4. Si $y = z$, alors les valeurs propres de A sont (en utilisant $1 + j + j^2 = 0$) :
$$x + 2y \quad , \quad x + jy + j^2 z = x + y(j + j^2) = x - y \quad \text{et} \quad x + jz + j^2 y = x - y.$$
Elles sont toutes réelles. Réciproquement : si $x + jy + j^2 z = x + jy - (1 + j)z = (x - z) + j(y - z)$ est réelle, alors $y - z = 0$.

Exercice 2. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle diagonalisable ?

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-3+\alpha & 5-\alpha & -\alpha \\ \alpha & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ -5 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 5-\alpha & -\alpha \\ \lambda+2 & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &\overset{L_1'=L_2-L_1}{=} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -\alpha \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-3). \end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 3\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim SEP(-2) \leq 2 \\ 1 \leq \dim SEP(3) \leq 1 \end{cases}$.

La matrice A est diagonalisable *ssi* $\dim SEP(-2) + \dim SEP(3) = \dim \mathbb{R}^3$, *ssi* $\dim SEP(-2) = 2$. On cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (*) \begin{cases} x = y \\ \alpha z = 0 \end{cases}.$$

– si $\alpha = 0$, alors $(*) \iff x = y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 2$, donc A est diagonalisable ;

– si $\alpha \neq 0$, alors $(*) \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1,0,0)$ la matrice identité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a,b,c)$, où (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. En déduire qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P$ est diagonale. (Vous avez bien lu ? c'est la même matrice P pour tout (a,b,c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a,b,c)$?

Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1,0,0)$ la matrice identité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $N \in F \iff \exists (a,b,c)\mathbb{R}^3,\ N = M(a,b,c) = a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K$, d'où $F = \mathrm{Vect}(I,J,K)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   La famille (I,J,K) est une famille génératrice de F. Montrons que la famille (I,J,K) est aussi libre :
$$a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.$$
   Donc (I,J,K) est une base de F.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$.
   D'où $\det(\lambda I - J) = \lambda(\lambda^2 - 2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\mathrm{Sp}(J) = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et
$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad , \quad J \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \quad , \quad J \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{w}}.$$
   Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\mathrm{Ker}(J - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, $\mathrm{Ker}(J - \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $\mathrm{Ker}(J + \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{w})$.

3. $$K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad , \quad K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}\,'} \quad , \quad K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}\,'},$$
   d'où le spectre : $\mathrm{Sp}(K) = \{0, 2\}$ et les sous-espaces propres :
   $\mathrm{Ker}(K - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathrm{Ker}(K - 2I) = \mathrm{Vect}(\vec{v}\,', \vec{w}\,')$.

4. On remarque que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(K - 2I) = \mathrm{Vect}(\vec{v}\,', \vec{w}\,')$. En effet, $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(K - 2I)$ car $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\,' + \vec{w}\,'$ et $\vec{w} \in \mathrm{Ker}(K - 2I)$ car $\vec{w} = \vec{w}\,' - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\,'$. On choisit donc P égal à la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
   Avec cette matrice P,
$$P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Avec la même matrice P, $P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P$ est diagonale car
$$P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P = P^{-1} \cdot (aI + bJ + cK) \cdot P = a \cdot P^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP.$$

6. D'après la question précédente,
$$P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} + 2c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + 2c \end{pmatrix}.$$
   Le spectre de la matrice $M(a,b,c)$ est donc $\{a, a + b\sqrt{2} + 2c, a - b\sqrt{2} + 2c\}$.