Exercice 1 - Condition de diagonalisabilité $(\star\star\star)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

Supposons dans un premier temps que f est diagonalisable et considérons alors F un sous-espace vectoriel de E. Comme f est diagonalisable sur E il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ formé uniquement de vecteurs propres de f. De plus considérons $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F, où $m = \dim(F)$.

Comme la famille $\mathcal{F}$ est libre (car c'est une base de F) et que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ est génératrice de E (car $\mathcal{B}$ en est une base) on peut affirmer, d'après le théorème de la base incomplète, qu'il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$\mathcal{E} = \mathcal{F} \cup \{v_i /\ i \in I\}$ soit une base de E.

En posant alors $G = \text{Vect}(v_i,\ i \in I)$ on obtient alors un supplémentaire de F stable par f car possédant une base de vecteurs propres.

Réciproquement supposons que tout sous-espace vectoriel de E admette une supplémentaire stable par f. On considère alors le sous-espace formé des espaces propres de f à savoir :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda Id)$$

Si $F = E$ alors f est diagonalisable, d'où le résultat. Sinon $F \subsetneq E$ en particulier on peut considérer un hyperplan $H \subset E$ contenant F. Dès lors cette hyperplan possède un supplémentaire stable par f, comme il s'agit d'une droite vectoriel on peut affirmer qu'elle est engendré par un vecteur propre de f alors qu'ils sont tous dans F ce qui est absurde. En particulier $F = E$ d'où le résultat.

Exercice 2 - Commutant (⋆⋆)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

On peut par exemple commencer par calculer le polynôme caractéristique de A, comme il s'agit d'une matrice 2×2 on sait qu'il est de la forme :

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)\, X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X+2)\,(X-3)$$

On en déduit alors que $\text{Sp}(A) = \{-2, 3\}$, ce qui permet de résoudre les systèmes $AX = -2X$ et $AX = 3X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ afin de déterminer les vecteurs propres.

Le premier fournit :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2x + y & = & -2x \\ 4x - y & = & -2y \end{array} \right. \iff 4x + y = 0$$

On en conclut alors que $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, de même la résolution de $AX = 3X$ conduit à $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

La première méthode , calculatoire, consiste à trouver les matrices commutant avec $\text{diag}(3, -2)$, puis en changeant de base on trouve les matrices commutant avec A et l'on conclut :

On raisonne par analyse/synthèse en posant $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on supposant que $ND = DN$, où $D = \text{diag}(3, -2)$, ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{array} \right. \iff b = 0 = c \iff N \text{ est diagonale}$$

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D. Á présent on remarque que l'on a $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

En considérant $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commute avec A on obtient alors :

$$AM = MA \longleftarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Longleftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Longleftrightarrow P^{-1}MP \text{ est diagonale}$$

Autrement dit il existe $a, d \in \mathbb{R}^2$ tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ d'où $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$. Réciproquement une telle matrice commute bien avec A d'où le résultat. Finalement $\mathcal{C}(A) = \left\{P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} / \ (a,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il s'agit d'un plan vectoriel, comme il est immédiat que I_2 et A lui appartiennent et qu'ils forment une famille libre, on en déduit par argument de dimension que $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

La seconde méthode fait appel à des arguments algébrique sur la dimension du commutant de A :

Comme on a montré précédemment que A possède pour valeur propre 3 et -2 qui sont chacune de multiplicités 1 on en déduit que la dimension du commutant $\mathcal{C}(A)$ vérifie :

$$\dim(\mathcal{C}(A)) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Enfin comme de façon immédiate I_2 et A sont tout deux des éléments de $\mathcal{C}(A)$, et qu'ils forment une famille libre, on en déduit qu'il s'agit d'une base, d'où $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 3 - Endomorphismer de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(\star)$

Montrer que l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a M associe $M + \mathrm{tr}(M) \times I_n$ est diagonalisable.

Regardons pour la valeur propre 1, on cherche $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle tel que $M = M + \mathrm{tr}(M) \times I_n$ d'où $\mathrm{tr}(M) \times I_n = 0$ dès lors $\mathrm{tr}(M) = 0$. On en déduit que $E_1 = \ker(\mathrm{tr})$ or la trace est une forme linéaire, son noyau est donc un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi $\dim E_1 = n^2 - 1$.
Enfin on remarque que $I_n + \mathrm{tr}(I_n) \times I_n = (n+1) \times I_n$ ainsi $n+1$ est une valeur propre, d'après ce qui précède sa dimension est au plus 1, donc $\dim E_{n+1} = 1$ et finalement l'application précédente est diagonalisable.

Exercice 4 - Diagonalisation de la transposée $(\star\star)$

Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a $M \mapsto^t M$.

1. Déterminer les valeurs propres de φ.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\varphi(M)$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda mj, i$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ et donc $\lambda = \pm 1$ on a alors :

— Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que -1 est une valeur propre de φ, les vecteurs propres appartenant $\mathrm{Vect}(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$.Ainsi on a $\dim E_{-1} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Si $\lambda = 1$, on a plus de contraintes sur les termes diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléments non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant les éléments de $\mathrm{Vect}(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$, on a donc $\dim E_1 = n + \frac{n(n-1)}{2}$

2. L'application φ est-elle diagonalisable ?

D'après la question précédente $\dim E_1 + \dim E_{-1} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ d'où $\dim E_1 + \dim E_{-1} = n + n(n-1) = n^2$ ainsi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1}$ et donc φ est diagonalisable.

Exercice 5 - Matrice par bloc $(\star\star)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Considérons $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\chi_M(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ ainsi M est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. De plus on trouve :

$$MX = X \iff \begin{cases} -x - y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{cases} \iff x = -y$$

$$MX = 2X \iff \begin{cases} -2x - y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{cases} \iff y = -2x$$

Ainsi $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, on a donc la diagonalisation $M = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons $Q = \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$, où on a noté $I = I_n$, on a alors :

$$Q \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Ainsi Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$ Calculons alors :

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 2A \\ -A & -4A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Ainsi B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$. Or une matrice diagonale par bloc est diagonalisable si, et seulement si, chacun des blocs est diagonalisable. On en conclut alors que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 6 - Espace de matrice diagonalisable $(\star\star)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.

1. On considère $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur non-nul, vérifier que l'on a l'égalité :

$$^t\overline{X}X = \|X\|_2^2$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et l'on obtient alors :

$$
\begin{aligned}
{}^t\overline{X}X &= (\overline{x_1}\dots\overline{x_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
&= \|X\|_2^2
\end{aligned}
$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique sont toutes imaginaires pures.

Soit $M \in A_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M *i.e* $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. On considère alors également $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.

Dès lors on a $MX = \lambda X$ par définition, puis en conjuguant et transposant cette relation on obtient :

$$
{}^t\overline{X}{}^t\overline{M} = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}
$$

Puis en multipliant à gauche par X on trouve :

$$
{}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\,\|X\|_2^2
$$

Cependant $M \in A_n(\mathbb{R})$, et donc ${}^t\overline{M} = -M$, d'où ${}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X = -\overline{\lambda}\,\|X\|_2^2$. Mais on obtient aussi ${}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X$ en multipliant à droite l'égalité $MX = \lambda X$ par ${}^t\overline{X}$, ce qui permet d'aboutir à la relation :

$$
\lambda\,\|X\|_2^2 = -\overline{\lambda}\,\|X\|_2^2
$$

Puis comme X est non nul, on en déduit que $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ ce qui signifie que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

3. On considère alors F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

   3.a. Montrer que F et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.

Il suffit de montrer que leur intersection est réduite à 0, considérons alors $M \in F \cap A_n(\mathbb{R})$. Par hypothèses M est donc diagonalisable, ce qui implique que son polynôme caractéristique χ_M est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, en particulier $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$.

Mais $M \in A_n(\mathbb{R})$ aussi, et d'après les questions précédentes, on peut affirmer que $\mathrm{Sp}(M) \subset i\mathbb{R}$. Finalement on en déduit que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. Comme M est diagonalisable est elle donc semblable à la matrice nulle, donc M est la matrice.

Ainsi on a démontrer que $F \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ ce qui permet de conclure que $F \oplus A_n(\mathbb{R})$.

   3.b. En déduire la majoration suivante :

$$
\dim(F) \leq \frac{n\,(n+1)}{2}
$$

On utilise la formule de Grassman à $F \oplus A_n(\mathbb{R})$ et l'on obtient :

$$
n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \geq \dim(F \oplus A_n(\mathbb{R})) = \dim(F) + \dim(A_n(\mathbb{R}))
$$

Enfin on montre classiquement que $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$, il suffit par exemple de considérer $(E_{i,j} - E_{j,i})$, où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires, pour obtenir une base de $A_n(\mathbb{R})$, puis de dénombrer.

En combinant ces deux résultats on trouve :

$$\dim(F) \leq n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 7 - Résolution d'un système de suite $(\star)$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}$ qui vérifient $a_0 = 0$ et $b_0 = -1$ ainsi que :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 8a_n - 3b_n \\ b_{n+1} & = & 18a_n - 7b_n \end{cases}$$

Donner une expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$ et $X_n(t) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a alors de façon immédiate $X_n = A^n X_0$. Or le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ qui est donc scindé à racine simples. De plus en résolvant les système $AY = -Y$ et $AY = 2Y$ on trouve $E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi on a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2^{n+1} & 6\Big((-1)^{n+1} + 2^n\Big) \\ (-1)^n - 2^n & 2(-1)^{n+1} + 3 \times 2^n \end{pmatrix}$ et ainsi $a_n = 6\Big((-1)^n - 2^n\Big)$ et $b_n = 2(-1)^n - 3 \times 2^n$.
