Colle n° 07

Réduction

Exercice 1. Soient un nombre complexe a et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.
2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi_M'(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 (Oral Mines Ponts PSI 2014)**.** On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit un polynôme $A(X) \in E$ tel que le réel $a = \int_0^1 A(t)\,dt$ est non nul. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme

$$u \,:\, E \to E,\; P(X) \mapsto A(X)\int_0^1 P(t)\,dt - P(X)\int_0^1 A(t)\,dt.$$

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Quels sont les éléments propres de u (c'est-à-dire ses valeurs propres et ses sous-espaces propres) ?

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A l'est.
2. (a) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A + I_n \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que, si C est diagonalisable, alors A l'est.

   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer que C est diagonalisable si, et seulement si, $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.