Colle 07 Réduction

EL GHRANDI Hugo

Exercice 1. Soit E un espace de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
On suppose que u est diagonalisable.

1. Montrer qu'un sous-espace G de E est stable par u si et seulement si G admet une base composée de vecteurs propres de u.
2. Montrer que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.
3. Réciproquement, soit v un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par v. Montrer que v est diagonalisable.

Exercice 2. On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite idempotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_n$. Si M est idempotente on définit son indice d'idempotence par $ind(M) = min\{p \in \mathbb{N}^* \mid M^p = I_n\}$.

1. Question de cours. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^n = 0$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + tB$ soit nilpotente pour $n + 1$ valeurs distinctes de t dans $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont nilpotentes.
3. Donner deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente, et $AB \neq BA$.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente. Montrer que A est idempotente et B est nilpotente.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.
6. Indépendant de ce qui précède. Déterminer $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ idempotente avec $ind(M) = 6$.

Solution **1.**

1. *Si G admet une base composée de vecteurs propres de u, alors G est stable par u. Récirproquement, si u est un endomorphisme diagonalisable, alors l'endomorphisme induit $G \to G$ est encore diagonalisable car $\pi_u(\tilde{u}) = 0$ et π_u simplement scindé.*
2. *Soit G un sous-espace de E et g une base de G.*
   Soit e une base de E de diagonalisation pour u.
   On peut compléter g en une base de F par une sous-famille e' de e.
   $H = Vect(e')$ convient.
3. *Par récurrence sur la dimension de E : n.*
   -> Quand $n = 1$: tout endomorphisme est diagonalisable.
   -> Pour passer du rang n au rang $n+1$: soit E de dimension $n+1$.
   Soit D une droite de E.
   Elle admet un supplémentaire H stable par v.
   H lui-même admet un supplémentaire D' stable par v.
   Il reste à prouver que l'endomorphisme w induit par v sur H est diagonalisable.
   On lui applique l'hypothèse de récurrence :
   (*) Soit G un sous-espace de H.
   G admet un supplémentaire dans E stable par v : G'.
   (*) On pose $F = H \cap G'$. F convient car :
   (**) F est un sous-espace de H et il est stable par v donc par w.
   (***) $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.
   (***) $F + G = H$ vu que $G' + G = E$ et en détaillant. On peut aussi passer par les dimensions en remarquant que $E = H + G'$.

Solution **2.**

1. *Le plus simple est d'utiliser une trigonalisation. Sinon, noyaux itérés.*
2. *Pas très original... Les coefficients de $(A+tB)^n$ sont polynomiaux en t de degré $\leq n$, et possèdent $n+1$ racines, donc sont identiquement nuls. $\forall t \in \mathbb{C}$, $(A+tB)^n$. En particulier ($t = 0$), $A^n = 0$. De plus les coefficients de t^n sont ceux de B^n ($(A+tB)^n = A^n + t.. + ... + t^{n-1}... + t^nB^n$), donc $B^n = 0$.*
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & -1 & g \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ *(i est le complexe) et* $B = -\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *avec $a, ..., g$ quelconques conviennent :*
   $sp(A+tB) = \{1, -1, i\}$, donc $A+tB$ est diagonalisable et $(A+tB)^4 = I_3$.
4. *$\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable, donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $Z \subset \mathbb{C}$ infini tels que $\forall t \in Z$, $ind(A+tB) = d$. On se fixe de tels d et Z. Alors $(A+tB)^d = A^d + ... + t^dB^d = I_n$ pour une infinité de t donc par argument de polynôme, $A^d = I_n$ et $B^d = 0$.*
5. *Par un changement de base on se ramène à B triangulaire.* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *En disant par exemple que $\forall t \in \mathbb{C}$, $|\det(A+tB)| = 1$, on obtient $ce = 0$. Si $e = 0$, $B = 0$ donc c'est bon, et si $c = 0$, A est triangulaire, donc c'est bon aussi.*
6. *χ_M est à coefficients entiers et unitaire. On voudrait que ses racines complexes soient racines primitives 6èmes de l'unité. $(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) = X^2 - X + 1$ convient.*
   Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *on veut $a + d = 1$ et $ad - bc = 1$. $a = 1$, $d = 0$, $b = 1$ et $c = -1$ conviennent.*
   Question supplémentaire (un peu répandu) : pour toute matrice idempotente $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $ind(M)$ divise 12.

FONTANET Adrien

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note P_A son polynôme caractéristique et p_A son polynôme minimal de A.

1. Caractérisation d'une matrice trigonalisable, (diagonalisable) à l'aide de P_A et p_A.
2. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si P_A est scindé, alors P_{A^k} est scindé pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que si P_{A^2} est scindé à racines toutes positives, alors P_A est encore scindé.
   (c) Donner un exemple où P_A n'est pas un polynôme scindé, mais P_{A^3} l'est.
3. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p(x) = x$. Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que si A n'est pas diagonalisable, alors il existe $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(A - \lambda I_n)^2 x = 0$ mais $(A - \lambda I_n)x \neq 0$.
   (c) On suppose que A est inversible et que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|A^k(x)\| < +\infty$. Montrer que A est diagonalisable.

Solution **3.** *1/ Cours. 2.a/ Si P_A est scindé, alors A est trigonalisable, donc A^k aussi et P_{A^k} est scindé.*
2.b/ Soit λ une valeur propre complexe de A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2 : on pose $\lambda = \alpha + i\beta$, et l'hypothèse sur les valeurs propres de A^2 implique que $(\alpha^2 - \beta^2) + i(\alpha\beta) \geq 0$, donc $\alpha\beta = 0$ et $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ et nécessairement $\beta = 0$. On en déduit que toutes les valeurs prores de λ sont réelles et P_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2.c/ Supposons que $P_A = X^2 + X + 1$, polyôme non scindé, alors $A^3 = -A^2 - A = -I$ et $P_A^3|(X - I)^3$. On prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3.a/ Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et soit $p_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{p_i}(e_i) = e_i$. Si p est le ppcm des p_i, alors A^p est la matrice identité, donc $A^p - I_n = 0$. On en déduit que $P_A|X^p - 1$ et donc n'a que des racines simples. Il est scindé puisque l'on est dans $\mathbb{C}$, la matrice est diagonalisable.
3.b/ Si f est endomorphisme en dimension finie, si la suite des noyaux ou des images de f^k est stable au rang k_0, elle devient constante. Si A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ tel que l'espace caractéristique associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $E \neq \ker(A - \lambda I_n)^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 2$. On en déduit que $\ker(A - \lambda I_n) \neq \ker(A - \lambda I_n)^2$, ce qui donne le résultat.
3.c/ On remarque que si λ est une valeur propre $(\neq 0)$ de A, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. On en déduit facilement que λ est de norme 1, sinon le sup n'existe pas. De plus, si A est diagonalisable avec que des valeurs propres de modules 1, il est clair que le sup existe. Enfin, si A n'est pas diagonalisable, il existe donc x et λ comme précédemment et $|\lambda| = 1$. En posant, posant $y = Ax - \lambda x$, on a $A^k x = k\lambda^{k-1}x + \lambda^k y$, dont le module tend vers $+\infty$. Donc A est diagonalisable.

Exercice 4. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est bien posée si, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MA + A^T M = C$. On note S_A l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

1. Soient X et Y deux vecteurs propres complexes de A^T. On pose $B = YX^T$.
   Calculer $BA + A^T B$.
2. On suppose que $S_A \cap S_{-A} \neq \emptyset$.
   Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $BA + A^T B = 0$.
3. On suppose $S_A \cap S_{-A} = \emptyset$. Montrer que $\chi_A(-A^T)$ est inversible.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit bien posée.
5. On suppose que tous les éléments de S_A ont leur partie réelle dans $\mathbb{R}_-^*$. Montrer qu'il existe une unique M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MA + A^T M = I_n$.

Solution **4.**

1. *Si X et Y sont associés respectivement aux valeurs propres λ_x et λ_y, alors $A^T B = A^T X Y^T = \lambda_x B$ et $BA = X(A^T Y)^T = \lambda_y B$.*
   Soit φ_A est l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $M \mapsto MA + A^T M$. Alors, $\lambda_x + \lambda_y$ est valeur propre de φ de vecteur propre (non nul) associé B.
2. *Si $S_A \cap S_{-A} \neq \emptyset$, alors il existe $\lambda \in S(A)$ telle que $-\lambda \in S(-A) = -S(A)$.*
   La dernière égalité, car A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et $-A$ a donc une diagonale avec les opposées de la diagonale de A. Mais $S_A = S_{A^T}$. On applique la question précédente à X vecteur propre non nul de A^T associée à λ et Y vecteur propre de A^T non nul associé à $-\lambda$ On obtient $B \neq 0$ telle que
   $$BA + A^T B = 0.$$
   Mais "A bien posée" est par définiton équivalent à "φ_A injective". Danc A n'est pas bien posée.
3. *Si $S_A \cap S_{-A} = \emptyset$, alors pour toute valeur propre $\lambda \in S_A$, $-\lambda \notin S_A$, donc $\chi_A(-\lambda) \neq 0$.*
   On sait que $-A^T$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et que sur la diagonale apparaissent les valeurs de $-A^T$ qui sont les mêmes que celles de $-A$, qui sont de la forme $-\lambda$ avec $\lambda \in S_A$.
   Or, si A semblable à une matrice triangulaire T) de diagonale $D(T) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors $-A^T$ est semblable à $-T^T$ et sa diagonale $D(-T^T) = (-\lambda_1, \cdots, -\lambda_n)$.
   Mais alors $\chi_A(-T^T)$ est encore une matrice triangulaire et sa diagonale vaut
   $$D(\chi(-T^T) = (\chi_A(-\lambda_1), \cdots, \chi_A(-\lambda_n)).$$
   On a montré que la diagonale n'a des éléments non nuls, donc est inversible.
4. *Montrons que φ_A est injective si et seulement si $S_A \cap S_{-A} = \emptyset$.*
   La question 2 montre $\Leftarrow$.
   Pour $\Rightarrow$: On suppose que $BA + A^T B = 0$. Alors $BA = -A^T B$. On vérfie par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $BA^k (= -A^T)^k B$.
   On en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $BP(A) = P(-A^T)B$.
   On applique cette propriété à χ_A, et ainsi $B\chi_A(A) = \chi(-A^T)B$. Mais le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\chi_A(A) = 0$. Donc $\chi_A(-A^T)B = 0$. Mais avec la condition de l'hypothèse, la question 3/ affirme que $\chi_A(-A^T)$ est inversible. Donc $B = 0$ et φ_A est injective et A est bien posée.
5. *On applique la proposition démontrée au 4/ à A.*
   Comme $Re(S(A)) \subset \mathbb{R}_-^*$, il est clair que $Re(S(-A)) \subset \mathbb{R}_+^*$ et donc leur inersection est vide.
   Donc A est bien posée. On en déduit que φ_A est injective, donc bijective car endomorphisme en dimension finie. Cela nous assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème posé.