CORRIGÉ DE LA COLLE N° 07

Réduction

12 novembre 2024

Exercice 1. Soient un nombre complexe a et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.
2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi'_M(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

---

1. $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ -1 & X & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - aX - a$.
2. Si $a = 0$ alors $\chi_M(X) = X^3$, d'où 0 est l'unique valeur propre de M. Si M est diagonalisable, alors il existe P telle que $P^{-1}MP = 0$. C'est absurde car $M \neq 0$. Donc M n'est pas diagonalisable.
3. Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)(X^2 + X + \frac{1}{2})$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1; -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}$. La matrice M possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.
4. La dérivée du polynôme $\chi_M(X)$ est le polynôme $\chi'_M(X) = 3X^2 - a$. Si $a = \dfrac{27}{4}$, alors $-\dfrac{3}{2}$ est une racine de $P_M(X)$ et de $\chi'_M(X)$, d'où $-\dfrac{3}{2}$ est une racine au moins double de $\chi_M(X)$.

   Le polynôme caractéristique possède donc deux racines : une racine simple égale à 3 et une racine double égale à $-\dfrac{3}{2}$. D'où $\dim SEP(3) = 1$ et $1 \leq \dim SEP(-\frac{3}{2}) \leq 2$. Donc M est diagonalisable si, et seulement si, $\dim SEP(-\frac{3}{2}) = 2$. Or

   $$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   D'où $\dim SEP(-\frac{3}{2}) = 1$. Donc M n'est pas diagonalisable.
5. Si le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ possède une racine z double, alors $\chi_M(z) = z^3 - az - a = 0$ et $\chi'_M(z) = 3z^2 - a = 0$. D'où $a = 0$ ou $z = -\frac{3}{2}$ (car $0 = 3\chi_M(z) - z\chi'_M(z) = -2az - 3a$).
   Si $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable (question 2).
   Si $z = -\frac{3}{2}$, alors $a = \frac{27}{4}$, d'où M n'est pas diagonalisable (question 4).
   Sinon, les racines du polynôme caractéristique sont simples, d'où il existe 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.
   Donc la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{0; \frac{27}{4}\right\}$.

Exercice 2 (Oral Mines Ponts PSI 2014)**.** On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit un polynôme $A(X) \in E$ tel que le réel $a = \int_0^1 A(t)\,dt$ est non nul. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme

$$u : E \to E,\ P(X) \mapsto A(X) \int_0^1 P(t)\,dt - P(X) \int_0^1 A(t)\,dt.$$

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Quels sont les éléments propres de u (c'est-à-dire ses valeurs propres et ses sous-espaces propres) ?

Posons le réel $a = \int_0^1 A$ et la forme linéaire $\varphi\colon P \mapsto \int_0^1 P$. Alors $u(P) = \varphi(P)A - aP$ et $u^2(P) = -au(P)$, donc $X^2 + aX = X(X+a)$ est un polynôme annulateur de u, scindé et à racines simples (car le réel a est non nul par hypothèse), donc l'endomorphisme u est diagonalisable et

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, -a\}$$

car le spectre est inclus dans l'ensemble des racines. De plus

$$u(P) = 0 \iff P \in \mathrm{Vect}(A), \quad \text{donc} \quad \mathrm{Ker}u = \mathrm{Vect}(A)$$

$$u(P) = -aP \iff \varphi(P) = 0, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Ker}(u + a\,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{P \in E,\ \int_0^1 P = 0\right\}.$$

On a ainsi déterminé les deux sous-espaces propres de u et donc prouvé l'égalité

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0, -a\}.$$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A l'est.
2. (a) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A + I_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que, si C est diagonalisable, alors A l'est.
   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer que C est diagonalisable si, et seulement si, $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

---

1. La matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible (son inverse est $\frac{1}{2}P$) et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -A \end{pmatrix} = B'$ est donc semblable à B.
   Si A est diagonalisable, alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ = D$ est diagonale. La matrice $R = \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}$ est alors inversible (son inverse est $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0_n \\ 0_n & Q^{-1} \end{pmatrix}$) et $R^{-1}B'R = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}$ est diagonale, ce qui prouve que la matrice B est diagonalisable.
   Si B est diagonalisable, alors il en est de même de B'. Il existe donc un polynôme Π annulateur de B' et scindé à racines simples. Or $\Pi(B') = \begin{pmatrix} \Pi(A) & 0_n \\ 0_n & \Pi(-A) \end{pmatrix}$, d'où $\Pi(A) = 0_n$, d'où le polynôme Π est annulateur de A et est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
2. (a) La matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ est inversible (son inverse est $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$) et $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A + I_n \end{pmatrix} = C'$ est donc semblable à C.
   (b) S la matrice C est diagonalisable, alors elle possède un polynôme annulateur Π scindé à racines simples. Or $\Pi(C') = \begin{pmatrix} 0_n & \star \\ 0_n & \Pi(A + I_n) \end{pmatrix}$. D'où $\Pi(A + I_n) = 0_n$. Le polynôme Π est ainsi annulateur de $A + I_n$ et est scindé à racines simples, d'où $A + I_n$ est diagonalisable, donc A l'est aussi.
   (c) Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ = D$ est diagonale car A est supposée diagonalisable. La matrice $R = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}$ est alors inversible (son inverse est $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & Q^{-1} \end{pmatrix}$) et $R^{-1}C'R = \begin{pmatrix} 0_n & \star \\ 0_n & D + I_n \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de C est donc $\chi_C(X) = X^n\,\chi_{D+I_n}(X)$ et, par suite, $\mathrm{Sp}(C) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(D + I_n)$.
   Si $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(D + I_n)$, d'où la multiplicité m_0 de la racine 0 dans la polynôme caractéristique $\chi_C(X)$ est supérieure à $n + 1$. Or la dimension du sous-espace propre $E_0(C)$ est égale à n car $\mathrm{rg}(C) = n$. D'où $m_0 > \dim E_0(C)$, donc C n'est pas diagonalisable.
   Si $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(D + I_n)$, d'où $\dim E_0(C) + \sum\limits_{\lambda \neq 0} E_\lambda(C) = n$, donc C est diagonalisable.