# MARINIER Paul

**Exercice 1.** Soit $E$ un ev de dimension $n$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in E$. On note $S_u(x)$ le plus petit sous-espace vectoriel stable par $u$ contenant $x$. Justifier que $S_u(x)$ existe et donner une famille génératrice de $S_u(x)$.
2. Soit $\mu_u$ le polynôme minimal de $u$. Montrer que $\dim S_u(x) \leq \deg \mu_u$.
3. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur $\mu_u$ ?
4. On suppose que $u$ est diagonalisable avec $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

**Exercice 2.** $\heartsuit$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $I = ]-\pi, \pi[$ par

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n \sin x},\ x \neq 0.$$

Étudier la convergence simple ou uniforme de la suite $(f_n)$ sur tout ou partie de l'intervalle $I$.

*Solution* **1.**

1. *L'intersection de sous-espace vectoriel stable contenant $x$ est un sous-espcae vectoriel stable qui contient $x$. On en déduit que l'intersection des sous-espaces vectoriels stables contenant $x$ est exactement $S_n(x)$. D'autre part, Vect$(u^k(x),\ k \in \mathbb{N})$ est certainement inclus dans $S_u(x)$, car $S_u(x)$ est stable par par $u$ et contient $x$, donc contient $u^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, Vect$(u^k(x),\ k \in \mathbb{N})$ est clairement stable par $u$. D'où l'égalité !*

2. *Si $\mu_u = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ avec $a_d \neq 0$, alors $\mu_u(u) = 0 = \sum_{k=0}^{d} a_x u^k$. On évalue en $x$ et on obtient que $a_d u^d(x) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x)$. On en déduit que $(x, u(x), \cdots, u^{d-1}(x))$ est une génératrice de $S_u(x)$.*

3. *Si $E = S_u(x)$ pour un certain $x \in E$, on a $\deg \mu_u = \dim E$. Le polynôme minimal de $u$ est de degré $n$.*

4. *Dans ce cas, on a $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$ et $\mu_u(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$.*
*Comme chaque sous-espace propre $E_i = Ker(u - \lambda_i Id)$ est de dimension au moins $1$ et comme on a $E = \oplus_{i=1}^{n} E_i$ (d'après le lemme des noyaux et d'après le théorème sur la diagonalisation), tous les sous-espaces propres de $u$ sont donc de dimension $1$.*
*Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres de $u$ pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors, d'après le cours, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$.*
*On pose $x = e_1 + \dots + e_n$. Montrons qu'on a $S_u(x) = E$.*
*Il faut donc montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (et donc une base de $E$).*
*Trouver des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ est équivalent à trouver un polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ de degré au plus $n-1$ tel que $P(u)(x) = 0$.*
*Comme les vecteurs $e_i$ sont des vecteurs propres de $u$, on a :*
$$P(u)(x) = P(u)(e_1 + \dots + e_n) = P(u)(e_1) + \dots + P(u)(e_n) = P(\lambda_1)e_1 + \dots + P(\lambda_n)e_n.$$
*Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, on a $P(u)(x) = 0$ si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*
*Or, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i$ si et seulement si $(X - \lambda_i) \mid P$ pour tout $i$, si et seulement si $\mu_u = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n) \mid P$.*
*Comme on cherche $P$ avec $\deg(P) \leq n-1 < \deg(\mu_u)$, le seul polynôme $P$ possible est $P(X) = 0$.*
*Donc, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.*
*Si on est pressé : la matrice compagnon $C$ associée à $\chi_u$ est semblable à la matrice de $u$ dans la base canonique (car toutes les deux digonalisables, avec la même diagonale !). Pour une matrice compagnon, le premier vecteur de la base vérifie $(x, Cx, \cdots, C^{n-1}x)$ libre.*

*Solution* **2.** *On a*
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin x}.$$
*On a donc convergence simple sur $I$ de la suite $(f_n)$ vers la fonction nulle (la convergence simple en $0$ est évidente) mais on n'a pas de convergence uniforme vers la fonction nulle car si $x_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = \sin^2 1 \neq 0$.*
*Par contre sur tout segment de la forme $[-\pi + \delta, \delta]$ ou $[\delta, \pi - \delta]$, on a*
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin \delta},$$
*qui donne la convergence uniforme.*

# DOUAUD Pia

**Exercice 3.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. On note $G_M$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda M$ soit semblable à $M$.

1. Quelle est la structure de $G_M$ ?
2. Montrer que si $M$ n'est pas nilpotente, $G_M$ est fini.
3. Déterminer $G_M$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Que se passe-t-il si $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$ ?

**Exercice 4.** ♡ On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement et vers quelle fonction ?
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ ?
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[-a, a]$, $a > 0$ ?

*Solution* **3.**

1. *On a* $M \sim 1.M$*, donc* $1 \in G_M$*. Et si* $M \sim \lambda M \sim \mu M$*, alors* $M \sim \lambda\mu^{-1}$*. Donc* $G_M$ *a une structure de sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$*.*
2. *On sait que* $\mathrm{Spec}\, M = \{a_1, \cdots, a_n\}$*, alors* $\mathrm{Spec}\, \lambda M = \{\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n\}$*. Si de plus, les deux matrices sont semblable, alors alors leur spectre sont égaux. On en déduit que la multiplication par* $\lambda$ *induit une permutation* $\sigma_\lambda$ *sur le spectre de* $M$*. L'application qui à* $\lambda \mapsto \sigma_\lambda$ *est une morphisme injectif de groupes.*
3. *Pour la première matrice :* $\pi_M = X^2 - X + 2$*, donc a deux racines complexes non réelles, non nulles et conjuguées* $z$ *et* $\bar{z}$*. Si* $\lambda \in G_M$*, alors* $\lambda z \in \{z, \bar{z}\}$*. Si* $\lambda z = z$*, alors* $\lambda = 1 \in G_M$*. Sinon,* $\lambda z = \bar{z}$ *et on doit alors avoir* $\lambda \bar{z} = z$ *; donc* $\lambda$ *est réel, mais c'est absurde. On en déduit que* $G_M = 1$*.*
   *Pour la seconde, le spectre vaut* $i$ *et* $-i$ *et on vérfie que* $G_m = \{-1, 1\}$*.*
   *Pour la troisième, on a* $M^3 = 1$ *, et* $\mathrm{Sp}\, M = \{1, j, j^2\}$*. On vérfie que* $G_M = \{1, j, j^2\}$
4. *On sait que toute matrice d'indice de nilpotence maximale est semblable à une matrice compagnon avec des* $0$ *sur la diagonale. Comme pour* $\lambda \neq 0$*,* $\lambda M$ *est encore nilpotente, d'indice de nilpotence maximale, on en déduit que* $G_M = \mathbb{C}^*$*.*

*Solution* **4.**

*Solution* **5.** *1/ Pour* $x = 0$*, on a* $f_n(0) = 0$ *pour tout* $n$*. Pour* $x \neq 0$ *fixé,* $f_n(x) \sim x$ *donc* $f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $x \mapsto x$*.*
*2/ Pour* $x_n = n$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n(\sin(1) - 1) = -\infty$$

*donc on n'a pas la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$*.*
*3/ Sur le segment* $[-a, a]$*, on étudie la fonction* $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$*,* $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1$ *qui est décroissante négative sur* $[-a, a]$ *et donc* $|g_n(x)| \leq |g_n(a)| = a - n \sin \frac{a}{n}$ *qui tend vers* $0$ *et donc on a la convergence uniforme sur tout segment.*

# XXX

**Exercice 5.** On considère le système

$$\left\{\begin{array}{l} XY + YX = 0 \\ X^2 = Y^2 = 0 \\ XY \neq 0 \end{array}\right. \qquad \text{avec} \quad (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2.$$

1. Montrer que le système n'admet pas de solution pour $n = 2$.
2. Montrer que pour $n = 2r \geq 4$, il y a une solution telle que le rang de $X$ vaut $r$.
3. Étudier le cas $n$ impair.

**Exercice 6.** ♡ Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = (n+1)\sin x \cos^n x$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt\right)$. La convergence de la suite est-elle uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ?

*Solution* **6.**

1. *Dans ce cas $X$ et $Y$ sont nilpotentes, et comme le problème est invariant par conjugaison simultanée sur $X$ et $Y$, on peut supposer que $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $x \neq 0$, et $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$ car* $\det(Y) = \operatorname{tr}(Y) = 0$.
   *On a alors $0 = XY + YX = \begin{pmatrix} cx & 0 \\ 0 & cx \end{pmatrix}$, d'où $c = 0$ puis $a = 0$ et contradiction.*
2. *Prendre $X = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix}$ avec $N \neq 0$ telle que $N^2 = 0$.*
3. *Si $n = 2r + 1 \geq 5$, on rajoute une ligne et une colonne de 0 à la solution précédente.*
   *Si $n = 3$, alors $X^2 = 0$ et $X \neq 0$ implique que $\operatorname{rg} X = 1$ et de même pour $Y$, mais $XY + YX = 0$ donnent Im$X = \operatorname{Im} Y$, vu que $\operatorname{Im} X \subset \ker X$, on obtient $XY = 0$, ce qui est absurde.*

*Solution* **7.**

1. *Pour $\in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $|\cos x| < 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} (n+1) \sin x \cos^{n+1} x = 0$ (le critère $u_{n+1}/u_n$ par exemple !).*
   *De plus, $f_n(0) = 0$.*
   *La suite $(f_n)$ converge donc simlement vers la fonction nulle.*
2. *La convergence est uniforme sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$. On écrit alors*
   $$(n+1)|\sin x \cos^n x| \leq (n+1) \cos^n \delta.$$
   *D'où la convergence uniforme.*
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt = \left[-\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2}$. *Si la convergence était uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on aurait*
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt = 0.$$