Corrigé du T.D. n° 4

Réduction

14 novembre 2024

Exercice 1. Soient a et b deux réels et A la matrice de taille $n \times n$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $b-a$ est une valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre correspondant.
2. Déterminer, s'il en existe, une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.

---

1. Si $a = 0$, alors $A = bI_n$ et tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre b. Donc $\mathrm{Sp}(A) = b$ et la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base du *sep* $\mathrm{Ker}(bI_n - A)$. Sinon :

$$\begin{aligned} AX = (b-a)X \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\iff \quad a \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ &\iff \quad (x_1 + \cdots + x_n) = 0 \text{ car } a \neq 0 \\ &\iff \quad x_n = -x_1 - \cdots - x_{n-1} \\ &\iff \quad X = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_2} + \cdots + x_{n-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{n-1}}. \end{aligned}$$

De plus, la famille de vecteurs $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ est libre, c'est donc une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre $b - a$.

2. Si $a = 0$, alors la matrice A est diagonale, donc diagonalisable car il suffit de choisir $P = I_n$. Si $a \neq 0$, alors tentons une analyse-synthèse :

Analyse – Si A est diagonalisable, alors $\mathrm{tr}\, A = nb = (n-1)(b-a) + \lambda_n$ où λ_n est la dernière valeur propre de A, d'où $\lambda_n = b + (n-1)a$;

Synthèse – $AX = [b + (n-1)a]\, X \iff x_1 = x_2 = \cdots x_n \iff X = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_n}$.

Conclusion – La famille (libre) de vecteurs $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de la matrice A. Donc cette matrice est diagonalisable. Plus précisément, si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} b-a & & & \\ & b-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & b+(n-1)a \end{pmatrix}$$

alors $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2 (AB & BA)**.**

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Calculer les deux produits matriciels par blocs
$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix}.$$
En déduire que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique et donc le même spectre.
2. Supposons que A est inversible et que AB est diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

---

1. Soit $x \in \mathbb{K}$. Les deux produits matriciels par blocs
$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & B \\ xA & xI_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & B \\ xA & xI_n \end{pmatrix}$$
sont égaux, d'où leurs déterminants aussi. Or on peut calculer ces déterminants par blocs car ils sont triangulaires par blocs :
$$\det(xI_n - BA) \cdot \det(xI_n) \times \det(I_n) \cdot \det(I_n) = \det(I_n) \cdot \det(I_n) \times \det(xI_n) \cdot \det(xI_n - AB).$$
Or $\det(xI_n) = x^n$. D'où $x^n \cdot (\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Première méthode : D'où $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'où le polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ est nul car il a une infinité de racines (à savoir tous les réels non nuls). D'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
   - Seconde méthode : D'où le polynôme $X^n \cdot (\chi_{AB} - \chi_{BA})$ est nul car il a une infinité de racines (à savoir tous les réels). D'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

   Donc les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux. Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique, les spectres de AB et de BA sont aussi égaux.
2. La matrice AB est diagonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}ABP = D$. D'où $B = A^{-1}PDP^{-1}$, donc $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = (A^{-1}P)D(A^{-1}P)^{-1}$ est semblable à D. Donc BA est aussi diagonalisable.

Exercice 3 ($u \circ v$ & $v \circ u$)**.** Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que : si $\lambda \neq 0$, alors λ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$.
3. Soit, pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$u(P) = P' \quad \text{et} \quad v(P) = \int_0^X P(t)\,dt$$
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

---

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$: il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $u(v(x)) = \lambda x$. D'où $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$ car $u(v(x)) \neq 0$. Donc λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det(v \circ u)$. D'où $\det(v \circ u) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de $v \circ u$.
3. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $u \circ v(P) = P$ et $v \circ u(P) = P - P(0)$. D'où $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$. D'où 0 est une valeur propre de $v \circ u$ mais pas de $u \circ v$. Donc la propriété de la question précédente n'est pas toujours vraie en dimension infinie.

Exercice 4. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme $P(X)$, associe le polynôme :
$$\varphi(P(X)) = X \cdot [P(X) - P(X-1)]\,.$$

1. Déterminer le noyau de φ. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
3. Soit f l'endomorphisme induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ par φ. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est le spectre de la matrice M ? Cette matrice est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

---

1. Soit $P(X)$ un polynôme : si $P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $X \cdot [P(X) - P(X-1)]$ est le polynôme nul, d'où $P(X) - P(X-1)$ est le polynôme nul, d'où $P(x) = P(0)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où $P(x) - P(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines, d'où $P(X) - P(0)$ est le polynôme nul, donc $P(X)$ est constant.
   Réciproquement : si $P(X)$ est constant, alors $P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Donc le noyau de φ est l'ensemble $\mathrm{Vect}(1)$ des polynômes constants.
   Le noyau de φ n'est pas $\{0\}$, donc φ n'est pas injective. D'autre part, par définition de φ, tout polynôme de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est divisible par X pour tout P, d'où le polynôme 1 n'appartient pas à l'image de φ, donc φ n'est pas surjective.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$: $\varphi(X^k) = X \cdot \left[X^k - (X-1)^k\right] = X \cdot \left[X^k - \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (-1)^{k-p} X^p\right]$, d'où $\varphi(X^0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\varphi(X^k) = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{k-p+1} \binom{k}{p} X^{p+1} = \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p-1} X^p.$$
   Par suite, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
3. D'après le calcul de $\varphi(X^k)$ effectué à la question précédente, la matrice M de f dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & n \end{pmatrix} = (m_{ij})_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2}$$
   où $m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{j}{i-1}$ si $1 \leq i \leq j$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Donc la matrice M est triangulaire supérieure. Le déterminant de la matrice M est $0 \times 1 \times \cdots \times n$. Il est nul, donc la matrice M n'est pas inversible. Le polynôme caractéristique de la matrice M est $\det(\lambda I_n - M) = (\lambda - 0)(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n)$. Donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0; 1; \cdots; n\}$. La matrice M, de taille $n+1$, possède $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux. Donc elle est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 - X$, d'où $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le spectre de la matrice M est $\{0; 1; 2\}$. Cherchons des vecteurs propres de la matrice :
   $$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   $$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 2x \\ y - z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   d'où $Q^{-1} \cdot M \cdot Q = D$, avec
   $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Les colonnes de Q sont les coordonnées dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, de trois vecteurs propres de f, qui son libres, donc : une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f est (P_1, P_2, P_3), où
   $$P_1(X) = 1 \quad , \quad P_2(X) = X \quad \text{et} \quad P_3(X) = -X + X^2.$$

Exercice 5 (La matrice compagnon).

Soient $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{p-3} & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si,

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de deux manières :
— en calculant le polynôme caractéristique de M ;
— en recherchant les vecteurs propres associés au scalaire λ.

2. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ ? Montrer que la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

---

1. *Première méthode :* Le polynôme caractéristique de la matrice M, défini par $\chi_M(x) = \det(xI_p - M)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, est un déterminant $p \times p$, qui, après l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + xC_2 + x^2C_3 + \cdots + x^{p-1}C_p$ sur les colonnes, s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ P(x) & \cdots & \cdots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \end{vmatrix}$$

et se développe en suivant la première colonne :

$$\chi_M(x) = (-1)^{p-1} \cdot P(x) \cdot (-1)^{p-1} = P(x), \text{ avec } P(x) = x^n + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots - a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Et λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si, $\chi_M(\lambda) = 0$.
Seconde méthode : Soient un scalaire λ et un vecteur colonne $X = (x_1, \cdots, x_p)^T$:

$$\begin{aligned} MX = \lambda X \quad & \iff \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1, \ x_3 = \lambda x_3, \cdots x_p = \lambda x_{p-1} \\ -a_0x_1 - a_2x_1 - \cdots - a_{p-1}x^p = \lambda x_p \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} X = x_1 \cdot (1, \lambda, \cdots, \lambda^{p-1})^T \ (*) \\ P(\lambda) = 0 \ (**) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc λ est une valeur propre si, et seulement si, $(**)$. Et les vecteurs propres sont les vecteurs non nuls donnés par $(*)$.

2. On reprend la seconde méthode de la question précédente. Pour chaque valeur propre λ, les vecteurs du sous-espace propre $\text{Ker}(\lambda I_p - M)$ sont donnés par $(*)$. D'où $\text{Ker}(\lambda I_p - M) = \text{Vect}(e_\lambda)$, où e_λ est le vecteur colonne $(1, \lambda, \cdots, \lambda^{p-1})^T$.
La matrice M est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des *sep* est égale à p. Or chaque sous-espace propre est ici de dimension 1. Donc elle est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

Exercice 6 (Discuter suivant les valeurs des paramètres)**.**

Soient a, b et c trois réels. Soient, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des réels a, b et c ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Rédac : Ne pas confondre paramètres (a, b, c) et inconnues (x, y, z). Dans les sytèmes d'équations à suivre, on cherche les solutions (x, y, z) en disjoignant les cas suivant les valeurs des paramètres a, b ou c.

1. • Si $a = 1$, alors $P_A(X) = (X-1)^3$, d'où $\text{Sp}(A) = \{1\}$. La matrice A n'est pas diagonalisable car $A \neq I_3$.
   • Si $a \neq 1$, alors $P_A(X) = (X-1)^2(X-a)$, d'où $\text{Sp}(A) = \{1; a\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim SEP(1) \leq 2 \\ 1 \leq \dim SEP(a) \leq 1 \end{cases}$.

   La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim SEP(1) = 2$. Soit $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$: $AX = 1X \iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

— Si $a = 0$, alors soit $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$: $AX = 1X \iff z = 0$, d'où $\dim SEP(1) = 2$.

— Si $a \neq 0$, alors soit $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$: $AX = 1X \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, d'où $\dim SEP(1) = 1$.

D'où la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

• Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } a = 0.}$

2. • Si $c = 2$, alors $P_B(x) = (x-2)^3$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$.

   — Si $b = 0$, alors la matrice $B = 2I_3$ est diagonale, donc diagonalisable.

   — Si $b \neq 0$, alors la matrice B n'est pas diagonalisable car $B \neq 2I_3$.

   • Si $c \neq 2$, alors $P_B(x) = (x-2)^2(x-c)$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{2; c\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim SEP(2) \leq 2 \\ 1 \leq \dim SEP(c) \leq 1 \end{cases}$. La matrice B est diagonalisable si, et seulement si, $\dim SEP(2) = 2$. Soit $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$: $BX = 2X \iff y = 0$. D'où la matrice B est diagonalisable.

   • Donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } c \neq 2 \text{ ou } b = 0.}$

Exercice 7 (Une matrice de rang 1 est diagonalisable *ssi* sa trace n'est pas nulle)**.**

▷ TD n° 2 exo 4 : matrices de rang 1 et base adaptée

On considère une matrice M de taille $n \times n$ et de rang 1.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable et préciser le spectre de M.
2. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{tr}(M) \neq 0$. Montrer que M est diagonalisable et préciser son spectre.

On se place dans une base adaptée (Rédac : construire explicitement cette base **▷ TD n° 2 exo 4**) : la matrice M étant de rang 1, elle est semblable à une matrice $M' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où les $*$ sont des réels et λ aussi est un réel, égal à $\mathrm{tr}(M')$. En outre, $\mathrm{tr}(M') = \mathrm{tr}(M)$, $\mathrm{Sp}(M') = \mathrm{Sp}(M)$ et la matrice M' est diagonalisable si, et seulement si, la matrice M l'est.

1. Le réel λ est nul et le polynôme caractéristique de M' est donc $\chi_{M'}(X) = (X-0)^n$. D'où $\mathrm{Sp}(M') = \{0\}$. Par l'absurde : si M' est diagonalisable, alors M' est semblable à la matrice nulle, d'où M' est la matrice nulle. C'est absurde car le rang de M' vaut 1.
2. Le polynôme caractéristique de M' est $\chi_{M'}(X) = (X-0)^{n-1} \cdot (X - \lambda)$ et λ n'est pas nul. La matrice M' a donc deux valeurs propres distinctes : 0 et $\lambda = \mathrm{tr}(M)$.
   D'une part, $SEP(0) = \mathrm{Ker}(0I_n - M') = \mathrm{Ker}(M')$ a pour dimension $n-1$ d'après le théorème du rang. Il existe donc une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ de $SEP(0)$.
   D'autre part, il existe au moins un vecteur propre ε_n associé à la valeur propre λ.
   Enfin la famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est libre car les *sep* sont en somme directe. Or elle contient n vecteurs. C'est donc une base formée de vecteurs propres de M', qui est par suite diagonalisable.

Exercice 8 (Commutation et stabilité **▷ proposition IV.35**)**.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.

---

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_3 - A) = 0$. On calcule le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-3 & 4 \\ -4 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} &= (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \quad (C_1+C_2+C_3 \to C_1) \\
&= (\lambda-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} \quad (C_2+C_1 \to C_2) \\
&= (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda+3)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2; -3\}$ et la matrice A est diagonalisable car elle est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux. Soit $V \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$:

$$AV = 1V \iff \begin{cases} x+y-z = 1x \\ 2x+3y-4 = 1y \\ 4x+y-4z = 1z \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \iff V = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$AV = 2V \iff \begin{cases} x+y-z = 2x \\ 2x+3y-4 = 2y \\ 4x+y-4z = 2z \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \iff V = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$AV = -3V \iff \begin{cases} x+y-z = -3x \\ 2x+3y-4 = -3y \\ 4x+y-4z = -3z \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} y = 7x \\ z = 11x \end{cases} \iff V = x\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs-colonnes $V_1 = (1\,1\,1)^T$, $V_2 = (1\,2\,1)^T$ et $V_1 = (1\,7\,11)^T$ sont libres car leurs valeurs propres sont distinctes deux à deux, donc $\boxed{\text{la matrice } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \text{ est inversible et la matrice } D = P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ est diagonale.}}$

2. Les matrices A et B commutent, d'où : les *sep* de A sont stables par B. Par conséquent :
   — d'après la question 1, le vecteur-colonne $V_1 = (1\,1\,1)^T$ appartient au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(1I_3 - A)$, d'où son image BV_1 aussi. Or $\mathrm{Ker}(1I_3 - A) = \mathrm{Vect}(V_1)$, d'où $BV_1 \in \mathrm{Vect}(V_1)$, d'où $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R},\ BV_1 = \lambda_1 V_1$, donc V_1 est un vecteur propre de B.
   — de même, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de B.

   Or, d'après la question 1, (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$, donc B est diagonalisable.

Exercice 9 (Trigonalisation & équations différentielles)**.**

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable. Est-elle trigonalisable ?
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et les déterminer.
3. En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

---

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X-1)^2$. D'où :
   — le spectre de A est $\{1\}$ et A n'est pas diagonalisable (car, par l'absurde, si A est diagonalisable, alors A est semblable à I_2, d'où $A = I_2$) ;

— mais A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

2. ANALYSE — Si A est semble à $T = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $(X-1)^2 = \chi_A = \chi_T = (X-a)(X-b)$, donc $a = b = 1$.

   SYNTHÈSE — Soient $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P la matrice dont la première colonne est V_1 et la seconde colonne V_2 :
$$P^{-1}AP = T \iff AV_1 = 1V_1 \text{ et } AV_2 = 1V_1 + 1V_2.$$
   D'une part, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut donc choisir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, en notant $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:
$$AV_2 = 1V_1 + 1V_2 \iff \begin{cases} y = 1 + x \\ -x + 2y = 1 + y \end{cases} \iff y = 1 + x.$$
   Choisissons $x = 0$, c'est-à-dire $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   CONCLUSION — La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (car $\det P = 1 \neq 0$) et $P^{-1}AP = T$.

3.
$$\begin{aligned}
\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases} &\iff X'(t) = A \cdot X(t) \quad \text{en notant } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\
&\iff U'(t) = T \cdot U(t) \quad \text{en notant } U(t) = P^{-1}X(t) \\
&\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases} \quad \text{en notant } U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
   D'une part, $v'(t) = v(t) \iff v(t) = Ke^t$. D'autre part :
$$\begin{aligned}
u'(t) = u(t) + Ke^t &\iff \ell'(t)e^t + \ell(t)e^t = \ell(t)e^t + Ke^t \quad \text{en faisant varier la constante, c'est-à-dire en posant } u(t) = \ell(t)e^t \\
&\iff \ell'(t) = K \\
&\iff \ell(t) = Kt + L \\
&\iff u(t) = (Kt + L)e^t.
\end{aligned}$$
   Or $U(t) = \begin{pmatrix} (Kt+L)e^t \\ Ke^t \end{pmatrix} \iff X(t) = P \cdot U(t) = \begin{pmatrix} (Kt+L)e^t \\ (Kt+K+L)e^t \end{pmatrix}$.

   Donc
$$\boxed{\Sigma \iff \exists (K, L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = (Kt+L)e^t \\ y(t) = (Kt+K+L)e^t \end{cases}}$$

Exercice 10 (Polynômes annulateurs ▷ **TD nº 2 exo 14**).

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M)I_n + M$. Trouver un polynôme annulateur de Φ de degré 2 et les éléments propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = PM + MP$. Déterminer un polynôme annulateur de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

---

1. On calcule $\Phi^2(M) = \operatorname{tr}(\Phi(M))I_n + \Phi(M) = (n \operatorname{tr} M + \operatorname{tr} M)I_n + (\operatorname{tr} M)I_n + M = (n+2)(\operatorname{tr} M)I_n + M$, et on constate que $\Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, le polynôme
$$P = X^2 - (n+2)X + n + 1 = (X-1)(X-(n+1))$$
   est annulateur de Φ. Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

   De plus, le spectre de Φ est inclus dans l'ensemble des racines de P, d'où $\operatorname{Sp}(\Phi) \subset \{1, n+1\}$. Le réel 1 est-il une valeur propre ? L'équation $\Phi(M) = M$ étant équivalente à $\operatorname{tr}(M) = 0$, le sous-espace propre $E_1(\Phi)$ est l'hyperplan des matrices de trace nulle. D'où 1 est une valeur propre et la dimension de $E_1(\Phi)$ vaut $n^2 - 1$. Le réel $n+1$ est-il une valeur propre ?

   – *Première méthode* : la somme des dimensions des *sep* est égale à n^2 car Φ est diagonalisable. On sait alors que $\dim E_{n+1}(\Phi) = 1$, et il suffit de constater que $\Phi(I_n) = (n+1)I_n$ pour obtenir le second sous-espace propre $E_{n+1}(\Phi) = \operatorname{Vect}(I_n)$.

– *Seconde méthode* : $M \in E_{n+1}(\Phi) \implies \Phi(M) = (n+1)M \implies (\operatorname{tr} M)I_n = nI_n \implies M = \frac{\operatorname{tr} M}{n} I_n \implies M \in \operatorname{Vect}(I_n)$. Réciproquement, $M \in \operatorname{Vect}(I_n) \implies \exists \alpha \in \mathbb{R},\ M = \alpha I_n \implies \Phi(M) = n\alpha I_n + \alpha I_n \implies \Phi(M) = (n+1)M \implies M \in E_{n+1}(\Phi)$. Donc $E_{n+1}(\Phi) = \operatorname{Vect}(I_n)$. Cette seconde méthode permet aussi de conclure d'une autre manière que Φ est diagonalisable car la somme des dimensions des *sep* de Φ est égale à la dimension de l'*ev* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, puisque l'énoncé réclame les éléments propres (= les valeurs propres et les sous-espaces propres) :

$$\operatorname{Sp}(\Phi) = \{1, n+1\}$$
$$E_1(\Phi) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$$
$$E_{n+1}(\Phi) = \operatorname{Vect}(I_n).$$

2. La matrice P est celle d'un projecteur, d'où $P^2 = P$. On cherche un polynôme annulateur de Φ :

$$\Phi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = \Phi(M) + 2PMP, \quad \text{d'où} \quad 2PMP = \Phi^2(M) - \Phi(M)$$
$$\text{donc } \Phi^3(M) = \Phi^2(M) + 4PMP = 3\Phi^2(M) - 2\Phi(M) \text{ pour toute matrice } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de l'endomorphisme Φ. Il est de plus scindé à racines simples, donc l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

Exercice 11. Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $M^5 = M^2$. En déduire une relation d'inclusion entre les deux ensembles $\operatorname{Sp}(M)$ et $\{0, 1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$.
2. On suppose de plus que $\operatorname{tr}(M) = n$. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de la matrice M. Cette matrice est-elle inversible ?
3. Déterminer toutes les matrices M telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = n$.

---

1. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2$ est un polynôme annulateur de la matrie M, d'où : si λ est une valeur propre de M, alors λ est une racine de P. Or les racines de $P(X) = X^2(X^3 - 1)$ sont 0 et les racines cubiques de l'unité : 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\operatorname{Sp}(J) \subset \{0, 1, j, j^2\}$.
2. Soit m_λ la multiplicité de chaque racine λ du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, d'où (▷ **Proposition IV.10**) $\operatorname{tr}(M) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda \cdot \lambda = m_0 \times 0 + m_1 \times 1 + m_j \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + m_{j^2} \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Cette trace vaut n par hypothèse, donc 1 est l'unique valeur propre. Par suite, 0 n'est pas une valeur propre de M, donc la matrice M est inversible.
3. *Analyse :* on a vu que M est inversible. En multipliant $M^5 = M^2$ par M^{-2}, on obtient donc $M^3 = I_n$. Le polynôme $Q(X) = X^3 - 1$ est donc un polynôme annulateur de M. Or ce polynôme $Q(X) = (X-1) \cdot (X-j) \cdot (X-j^2)$ est scindé à racines simples, d'où la matrice M est diagonalisable. Mais on a aussi vu que 1 est l'unique valeur propre de M. La matrice M, une fois diagonalisée, devient donc l'identité I_n : M est semblable à I_n, on en déduit que $M = I_n$.
Synthèse : la matrice I_n est bien une solution de l'équation $M^5 = M^2$ et sa trace est bien égale à n.
Conclusion : l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = n$ est donc $\{I_n\}$.
AUTRE MÉTHODE : le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est $(X-1)^n$ car le spectre de M est $\{1\}$. Le polynôme minimal μ_M de la matrice M divise les deux polynômes $\chi_M = (X-1)^n$ et $P = X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ car ils sont tous deux annulateurs de la matrice M. D'où $\mu_M = X - 1$, donc $0 = \mu(M) = M - I_n$, donc $M = I_n$. LA synthèse est identique à celle de première méthode.

Exercice 12. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^2)$.
2. On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^2)$.
3. Donner un exemple de matrice A telle que A^2 soit diagonalisable mais pas A.

Notons E l'*ev* $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$.

1. Soit $X \in E$: si $AX = 0$, alors $A^2X = A \cdot (AX) = A \cdot 0 = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^2)$.

2. La matrice A^2 est diagonalisable, d'où ses sous-espaces propres sont supplémentaires :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A^2) \qquad (*).$$

Pour chaque valeur propre complexe λ non nulle, le polynôme $(X^2 - \lambda)$ se factorise en $(X - \sqrt{\lambda})(X + \sqrt{\lambda})$, en notant $\sqrt{\lambda}$ une des deux racines complexes de λ. D'où $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A^2) = \mathrm{Ker}(\sqrt{\lambda} I_n - A) \oplus \mathrm{Ker}(-\sqrt{\lambda} I_n - A)$ d'après le LEMME DES NOYAUX.

• <u>Premier cas : 0 n'est pas une valeur propre de A</u> — D'une part, $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerA}^2 = \{0_E\}$ car la matrice A est inversible et, donc, la matrice A^2 aussi. D'autre part,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^2)} \left[\mathrm{Ker}(\sqrt{\lambda} I_n - A) \oplus \mathrm{Ker}(-\sqrt{\lambda} I_n - A) \right].$$

d'après $(*)$. D'où l'*ev* E est une somme de sous-espaces propres de la matrice A. Donc cette matrice A est diagonalisable.

• <u>Deuxième cas : 0 est une valeur propre de A</u> — D'après $(*)$,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^2) \setminus \{0\}} \left[\mathrm{Ker}(\sqrt{\lambda} I_n - A) \oplus \mathrm{Ker}(-\sqrt{\lambda} I_n - A) \right] \oplus \mathrm{Ker}(A^2).$$

Si $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$, E est une somme de sous-espaces propres de la matrice A. Donc cette matrice A est diagonalisable. Réciproquement :

— *(Première méthode)* si $\mathrm{Ker}(A) \neq \mathrm{Ker}(A^2)$, alors la somme directe

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^2) \setminus \{0\}} \left[\mathrm{Ker}(\sqrt{\lambda} I_n - A) \oplus \mathrm{Ker}(-\sqrt{\lambda} I_n - A) \right] \oplus \mathrm{Ker}(A)$$

n'est pas égale à E car $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ d'après la première question mais $\mathrm{Ker}(A) \neq \mathrm{Ker}(A^2)$. Or il n'y a pas d'autres sous-espaces propres de A car il n'y a pas d'autre valeur propre de A (en effet : $\forall \mu \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathrm{Sp}(A) \implies \mu^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$). D'où les *sep* de A ne sont pas supplémentaires, donc A n'est pas diagonalisable.

— *(Deuxième méthode)* si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Et, par suite, $D^2 = P^{-1}A^2P$. Les matrices diagonales D^2 et D ont le même nombre de zéros sur la diagonale. Or ces nombres de zéros sont $\dim \mathrm{Ker}(A)$ et $\dim \mathrm{Ker}(A^2)$. Les *sev* $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^2)$ ont donc la même dimension. D'après la première question, il sont donc égaux.

Dans les deux cas : A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors A^2 est la matrice nulle et $\mathrm{Ker}(A^2) = E \neq \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P(X) \mapsto [(aX + b)P]'.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P(X) \mapsto [(aX + b)P]'.$$

1. Si $a = 0$:

— si $b = 0$, alors $f(P) = 0$, d'où $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ et $SEP(0) = \mathbb{R}_n[X]$;

— si $b \neq 0$, alors $f(P) = bP'$, d'où $f(P) = \lambda P \iff P' = \dfrac{\lambda}{b} P \iff P(x) = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda x/b}$. Et P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si, $\lambda = 0$. D'où $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ et $SEP(0) = \mathbb{R}_0[X]$.

Si $a \neq 0$, alors $f(P) = \lambda P \iff (ax + b)P'(x) = (\lambda - a)P(x) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = K \cdot (ax + b)^{(\lambda - a)/a}$. Et P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si, $\dfrac{\lambda}{a} - 1 \in [\![0, n]\!]$. D'où $\mathrm{Sp}(f) = \{(k+1)a,\ k \in [\![0, n]\!]$ et $SEP((k+1)a) = \mathrm{Vect}((aX+b)^k)$.

2. Si $a \neq 0$, alors f possède $n + 1$ valeurs propres distinctes deux à deux, d'où f est diagonalisable.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors 0 est l'unique valeur propre et $\dim SEP(0) = 1 < n + 1$, d'où f n'est pas diagonalisable.
Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $f = 0$, d'où f est diagonalisable.

Exercice 14. Soient $n-1$ réels $a_1, \ldots, a_{n-1}$ non tous nuls. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Déterminer son rang et son spectre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

---

1. Méthode 1 (sans polynôme caractéristique) — Le rang de A est égal à 2 car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. D'où 0 est une valeur propre et le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ d'après le théorème du rang. Existe-t-il d'autres valeurs propres ? Soient $\lambda \neq 0$ et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n \\ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2) x_n = \lambda^2 x_n \end{cases}$$

On cheche un vecteur propre, supposons donc que le vecteur-colonne X est non nul. Alors

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \lambda^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \\ X = x_n (a_1\ a_2 \cdots a_{n-1}\ \lambda)^T \end{cases}$$

D'où il y a deux valeurs propres $\pm toto$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. De plus $\dim E_{+toto}(A) = 1 = \dim E_{-toto}(A)$.

On en déduit que $\dim E_0(A) + \dim E_{+toto}(A) + \dim E_{-toto}(A) = n - 2 + 1 + 1$ est égale à la taille de la matrice A, donc cette matrice est diagonalisable.

2. Méthode 2 (avec polynôme caractéristique) — Soit $x \in \mathbb{R}$:

$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & -a_{n-1} \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix} = x^n - x^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$ en développant suivant la dernière ligne. On factorise :

$\det(xI_n - A) = x^{n-2}(x - toto)(x + toto)$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse.

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, +toto, -toto\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim E_0(A) \leq n-2 \\ 1 \leq \dim E_{+toto}(A) \leq 1 \\ 1 \leq \dim E_{-toto}(A) \leq 1 \end{cases}$

Or le rang de A est égal à 2 car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. Doù le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ d'après le théorème du rang. Par suite la somme des dimensions des *sep* de la matrice A est égale à la taille de cette matrice. La matrice A est donc diagonalisable.

Exercice 15. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $f : E \to E$ l'application qui transforme chaque suite réelle $u = (u_n)$ en la suite réelle $v = (v_n)$ définie par

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

---

1. Soient deux réels α et β et deux suites u et v : $f(\alpha u+\beta v)_n = \begin{cases} \alpha u_0 + \beta v_0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{(\alpha u_n+\beta v_n)+(\alpha u_{n-1}+\beta v_{n-1})}{2} = \alpha\frac{u_n+u_{n-1}}{2} + \beta\frac{v_n+v_{n-1}}{2} \text{ sinon} \end{cases}$.
   D'où $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$. Donc l'application f est linéaire.
2. Soit u une suite : $u \in \mathrm{Ker} f \iff f(u) = 0 \iff \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{u_n+u_{n-1}}{2} = 0 \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 0 \iff u = 0$. D'où $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. Donc l'application f est injective.
   Soit v une suite : alors v est l'image par f de la suite u définie par la condition initiale $u_0 = v_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = 2v_n - u_{n-1}$. Donc l'application f est surjective.
3. Analyse — Soit un réel λ et une suite $u \in E_\lambda(f)$. Alors $u_0 = \lambda u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \frac{u_n+u_{n-1}}{2} = \lambda u_n$.
   Premier cas : si $u_0 \neq 0$, alors $\lambda = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \frac{u_n+u_{n-1}}{2} = u_n$, d'où $u_n = u_{n-1}$, donc la suite u est constante.
   Second cas : si $u_0 = 0$, alors la suite u est nulle. Par l'absurde : si la suite u n'est pas nulle, alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_N \neq 0$ et $u_{N-1} = 0$. Or $\frac{u_N+u_{N-1}}{2} = \lambda u_N$. D'où $\lambda = \frac{1}{2}$ et, au rang suivant, $\frac{u_{N+1}+u_N}{2} = \frac{1}{2}u_{N+1}$. D'où $u_N = 0$: c'est absurde.
   A la fin de cette analyse, on sait que : si λ est une valeur propre de f et $u \in E_\lambda(f)$, alors $\lambda = 1$ et la suite u est constante.
   Synthèse — Soit u une suite constante. Alors $f(u) = u$.
   Donc $\mathrm{Sp} f = \{1\}$ et la sous-espace propre $E_1(f)$ est l'ensemble des suites constantes.

Exercice 16 (Diagonaliser la transposée)**.** Soient A et P deux matrices de $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : si une matrice P est inversible, alors sa transposée ${}^tP$ l'est aussi. Exprimer $({}^tP)^{-1}$ en fonction de P^{-1}.
2. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que ${}^tA$ l'est aussi.
   (b) Comparer les spectres et les dimensions des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$.
   (c) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On note C_j la $j-$ème colonne de P et $X_j = {}^tP^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j$. Calculer ${}^tAX_j$ et en déduire une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de ${}^tA$.

---

1. En transposant $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I_n$, on obtient : $(P^{-1})^T \cdot P^T = P^T \cdot (P^{-1})^T = I_n$, donc P^T est inversible et son inverse $(P^T)^{-1}$ est $(P^{-1})^T$.
2. En transposant $D = P^{-1}AP$, on obtient : $D^T = P^T A^T (P^{-1})^T$. Or $D^T = D$ car D est diagonale et $P^T A^T (P^T)^{-1}$ car $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$. D'où $D = P^T A^T (P^T)^{-1}$. Donc A^T est diagonalisable. De plus, A et A^T ont les mêmes valeurs propres car celles-ci sont les éléments diagonaux de la même matrice D. Enfin, les *sep* de A et de A^T ont les mêmes dimensions car la dimension de $SEP(\lambda)$ est égale au nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale de D.
3. Remarquons que $P^{-1}C_j$ est égal à E_j, le $j-$ème vecteur colonne de la base canonique de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Puis calculons : ${}^tAX_j = {}^tA\left({}^tP^{-1}P^{-1}C_j\right) = \left({}^tP^{-1}{}^tP\right)\left({}^tA{}^tP^{-1}P^{-1}C_j\right) = {}^tP^{-1}\left({}^tP{}^tA{}^tP^{-1}\right)\left(P^{-1}C_j\right) = {}^tP^{-1}DE_j = {}^tP^{-1}\lambda_j E_j = \lambda_j {}^tP^{-1}E_j = \lambda_j {}^tP^{-1}P^{-1}C_j = \lambda_j X_j$. Les n vecteurs X_j sont donc des vecteurs propres de la matrice ${}^tA$.
   Par ailleurs, ces n vecteurs sont libres car ce sont les images, par la matrice inversible ${}^tP^{-1}P^{-1}$, des vecteurs C_j qui sont libres. Ils forment donc une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Exercice 17 (Hyperplans & transposée)**.**

1. Soient un entier $n \geq 2$, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne non nul $V = (v_1 \ \cdots \ v_n)^T$. Montrer que l'hyperplan H d'équation
$$v_1x_1 + \cdots + v_nx_n = 0$$
   est stable par A si, et seulement si, V est un vecteur propre de A^T.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

---

1. Supposons que V est un vecteur propre de A^T : $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ A^T \cdot V = \lambda V$ $(*)$. Montrons que l'hyperplan H est stable par A.

   Soit $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$: $X \in H \implies V^T \cdot X = 0 \implies \lambda \cdot \left(V^T \cdot X\right) = 0 \implies (\lambda V)^T \cdot X = 0 \overset{(*)}{\implies} \left(A^T \cdot V\right)^T \cdot X = 0 \implies \left(V^T \cdot A\right)^T \cdot X = 0 \implies V^T \cdot (A \cdot X) = 0 \implies A \cdot X \in H$. Donc l'hyperplan H est stable par A.

   Réciproquement, supposons que l'hyperplan H est stable par A.
   Alors, pour chaque $X \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$, $\left[V^T \cdot X = 0 \implies V^T \cdot (AX) = 0\right]$ $(**)$. Or $V^T \cdot A = \left(A^T \cdot V\right)^T$.
   Ou bien le vecteur colonne $A^T \cdot V$ est nul : V est alors un vecteur propre de A^T, associé à la valeur propre 0.
   Ou bien le vecteur colonne $A^T \cdot V$ n'est pas nul : alors l'hyperplan d'équation $V^T \cdot X = 0$ est inclus, d'après $(**)$, dans l'hyperplan d'équation $\left(A^T \cdot V\right)^T \cdot X = 0$. Donc ces deux hyperplans sont égaux car ils ont la même dimension, à savoir $n-1$ (c'est un théorème du cours). Or (c'est aussi un théorème du cours) <u>deux équations d'un même hyperplan sont proportionnelles</u>, d'où : $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ A^T \cdot V = \lambda V$. Donc V est à nouveau un vecteur propre de A^T.
2. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A sont :
   (i) le singleton $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (certainement) ;
   (ii) des droites vectorielles incluses dans $\mathbb{R}^3$ (peut-être) ;
   (iii) des plans vectoriels inclus dans $\mathbb{R}^3$ (peut-être) ;
   (iv) tout l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ (certainement).

   Précisons (ii) : une droite vectorielle $\mathrm{Vect}(V)$ est stable par A si, et seulement si, V est un vecteur propre de A (c'est un théorème du cours). Cherchons donc les valeurs et vecteurs propres de A.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \iff \cdots \iff (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

   D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1; 2\}$. De plus :
   $AV = -1V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(V_1)$, où $V_1 = (1\ 0\ 1)^T$
   $AV = 1V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(V_2)$, où $V_2 = (1\ -1\,1)^T$
   $AV = 2V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(V_3)$, où $V_3 = (2\ -1\,1)^T$
   Il y a donc exactement 3 droites vectorielles stables par A : $\mathrm{Vect}(V_1)$, $\mathrm{Vect}(V_2)$ et $\mathrm{Vect}(V_3)$.

   Précisons (iii) : un plan vectoriel inclus dans $\mathbb{R}^3$ est un hyperplan, d'équation $V^T \cdot X = 0$. D'après la question précédente, il est stable par A si, et seulement si, V est stable par A^T. Cherchons donc les valeurs et vecteurs propres de A^T. Le spectre de A est égal à celui de A^T. De plus :
   $A^T \cdot V = -1V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(W_1)$, où $W_1 = (0\ 1\ 1)^T$
   $A^T \cdot V = 1V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(W_2)$, où $W_2 = (1\,1\ -1)^T$
   $A^T \cdot V = 2V \iff \cdots \iff V \in \mathrm{Vect}(W_3)$, où $W_3 = (1\,0\ -1)^T$
   Il y a donc exactement 3 hyperplans stables par A : ils ont pour équations respectives $y+z=0$, $x+y-z=0$ et $x-z=0$.