Corrigé du T.D. n° 5

Suites de fonctions

14 novembre 2024

Exercice 1. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto n^k x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a,+\infty[$?

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:
   - si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ ;
   - si $x > 0$, alors $f_n(x) = n^k x \mathrm{e}^{-nx}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ par croissances comparées.

   D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. Chaque fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = n^k(1 - nx)\mathrm{e}^{-nx}$, d'où le tableau des variations :

x	0		$1/n$		
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	n^{k-1}/e	$\searrow$	0

   On en déduit que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n^{k-1}}{\mathrm{e}}$ tend vers 0 si, et seulement si, $k < 1$.

   Donc la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $k < 1$.
3. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est décroissante sur $\left[\frac{1}{n},+\infty\right[$. Or, à partir d'un certain rang : $a > \frac{1}{n}$, d'où la fonction f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$, d'où $\sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = n^k a \mathrm{e}^{-na}$ tend vers 0, donc la convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$, quelle que soit la valeur de la constante k.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a > 0$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x > 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f \,:\, \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ alors que les fonctions f_n le sont.

Autre méthode : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n}$: $|f_n(u_n) - f(u_n)| = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. D'où $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ ne tend pas non plus vers zéro. Donc la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$ car, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > a$, $0 \leq |1 - f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$ qui est un majorant. D'où $0 \leq \sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+na}$ car le *sup* est le plus petit majotant. Or $\frac{1}{1+na} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

---

1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n 2^n x^2} \sim \dfrac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^n t}{1 + n2^n t^2}\,dt = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n2^n t}{1+n2^n t^2}\,dt = \frac{1}{2n}\int_0^{n2^n} \frac{du}{1+u}$

   après le CDV $u = n2^n t^2$ ($du = 2n2^n t dt$). La fonction $t \mapsto n2^n t^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$. D'où $I_n = \dfrac{1}{2n}\left[\ln(1+u)\right]_0^{n2^n}$.

   Donc $I_n = \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln(n2^n) + \ln(1 + \frac{1}{n2^n})}{2n} = \dfrac{n\ln 2 + \ln n + \ln(1+\frac{1}{n2^n})}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln 2}{2}$.
3. Par l'absurde : si (f_n) converge uniformément vers 0 (la fonction nulle), alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\ln 2}{2}$ est égal à $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0$. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

   Autre méthode — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$ et $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{2^n \frac{1}{n}}{1+2^n\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞. Or $\sup\limits_{[0,1]}|f_n - f| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$, d'où $\sup\limits_{[0,1]}|f_n - f|$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞. Donc la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2} - 0\right| \leq \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} \leq \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$,

   d'où $0 \leq \displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers 0 (la fonction nulle).

Exercice 4. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1}. En déduire la limite de (u_n).
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

---

1. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$, d'où $0 \leq \tan^{n+1} x \leq \tan^n x$.

   D'où (croissance de l'intégrale) : $0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,\mathrm{d}x$. D'où la suite (u_n) est décroissante. Et minorée par 0. Donc la suite (u_n) est convergente.
2. $u_{n-1} + u_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x \cdot \left(1 + \tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x$. Or $1 + \tan^2 x = \tan' x$.

   D'où $u_{n-1} + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}(x)\cdot\tan'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\tan^n(x)}{n}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n}$.

   Notons ℓ la limite de u_n (on sait que cette limite existe et est réelle car la suite (u_n) converge). L'égalité $u_{n-1} + u_{n+1} = \frac{1}{n}$ passe à la limite et devient : $\ell + \ell = 0$. Donc $\lim u_n = 0$.
3. On utilise le théorème de la convergence dominée :

   * Chaque fonction $f_n : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan^n(x)$ est continue par morceaux (et même continue).

   ** f_n converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \pi/4 \\ 1 \text{ si } x = \pi/4 \end{cases}$, continue par morceaux.

*** $\forall x \in [0, \pi/4],\ |f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 1\, dx$ converge.

D'où $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx = 0$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5 (convergence dominée)**.**

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$
est une intégrale convergente.
2. Montrer que la suite des fonctions $f_n\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.

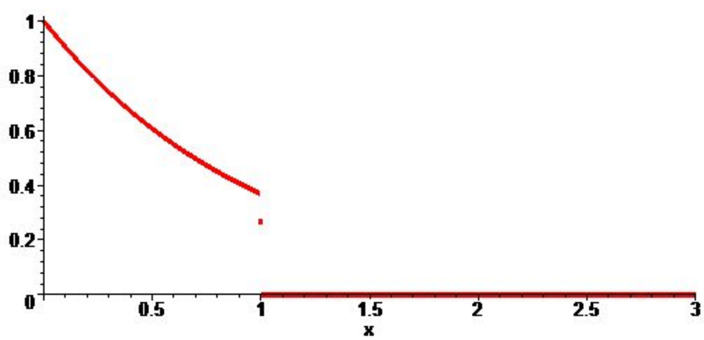

Figure 1 – La limite f de la suite des fonctions $f_n\ :\ [0, +\infty[\to, \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

---

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n\ :\ [0, +\infty[\to, \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.
$\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ converge, d'où l'intégrale impropre $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge.
2. Soit $x \in [0, +\infty[$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x \in [0, 1[\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. Donc la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction
$$f\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x \in [0, 1[,\ \frac{1}{1+\mathrm{e}} \text{ si } x = 1 \text{ et } 0 \text{ si } x > 1$$
représentée sur la figure 1.
3. On utilise le théorème de la convergence dominée :
* Chaque fonction f_n est continue par morceaux.
** f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f, continue par morceaux.
*** $\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ (qui ne dépend pas de n) et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ converge.
D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 6. 1. La fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ est appelée la **fonction Gamma d'Euler**.
Montrer que le réel $\Gamma(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.

2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } & t \in]0, n[\\ 0 \text{ si } & t \geq n \end{cases}$

   Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction f ?

3. Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$ converge pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$I_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

4. Soit $x > 0$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt$ converge et que

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$

   En déduire une expression de $J_n(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

5. Soit $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = n^x J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire **l'identité d'Euler** :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

---

1. Le réel $\Gamma(x)$ est défini *ssi* l'intégrale $\Gamma(x)$ converge. Or cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$, donc elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\Gamma_1(x) = \int_0^7 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ et $\Gamma_2(x) = \int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ convergent.

   D'une part, $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^7 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ converge *ssi* $1 - x < 1$. D'où l'intégrale $\Gamma_1(x)$ converge *ssi* $x > 0$.

   D'autre part, $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t/2} \mathrm{e}^{-t/2} t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$ et $\mathrm{e}^{-t/2}$ ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\, dt$ converge. D'où l'intégrale $\Gamma_2(x)$ converge pour tout réel x.

   Donc le réel $\Gamma(x)$ est défini *ssi* $x > 0$.

2. Soit $x > 0$.

   Soit $t \in]0, +\infty[$: à partir d'un certain rang n, ce réel t appartient $]0, n[$. Alors $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, d'où $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)}$ et $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = n\left(-\frac{t}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{t}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -t$.

   Donc la suite de fonctions (f_n) CVS sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

3. Soit $x > 0$. L'intégrale $I_n(x)$ est impropre en 0. De même que $\Gamma_1(x)$, elle converge car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$.

   Puis on utilise le théorème de la convergence dominée :

   * Chaque fonction f_n est continue par morceaux.

   ** D'après la question 2, f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f, continue par morceaux.

   *** $\forall t \in]0, +\infty[,\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ (qui ne dépend pas de n) et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ converge d'après la question 1.

   D'où $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \Gamma(x)$.

4. Soit $x > 0$. L'intégrale $J_n(x)$ converge pour la même raison que $I_n(x)$.

   On intègre par parties. Soit $a \in]0, 1]$: $\int_a^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt = \left[\frac{t^x}{x}(1-t)^{n+1}\right]_a^1 + \frac{n+1}{x} \int_a^1 (1-t)^n t^x\, dt$ car les fonctions $t \mapsto \frac{t^x}{x}$ et $t \mapsto (1-t)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Or $\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^{n+1}\right]_a^1 \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

   Donc $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$.

   Enfin, par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$: $J_n(x) = \dfrac{n}{x} \dfrac{n-1}{x+1} \dots \dfrac{1}{x+n-1} J_0(x+n) = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$.

5. Soit $x > 0$. En posant le CDV $u = \frac{t}{n}$, qui est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n n^x u^{x-1} du = n^x J_n(x)$. On en déduit l'identité d'Euler en utilisant les questions 3 et 4.

Exercice 7. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

1. Voir un contre-exemple sur la figure.

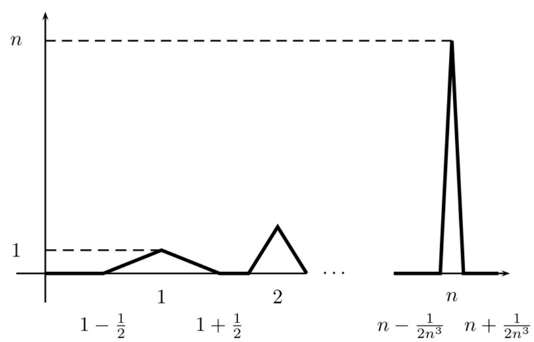

FIGURE 2 – Pas de divergence grossière pour les intégrales généralisées

2. Raisonnons par l'absurde et montrons que si la limite est non nulle, l'intégrale ne peut pas converger absolument.
   PREMIER CAS : si la limite est finie. Soit $\ell \neq 0$ la limite de f. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   $$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$
   On en déduit que :
   $$\int_{x_0}^{x} f(x)dx \geq \int_{x_0}^{x} \frac{\ell}{2} dx = \frac{\ell}{2}(x - x_0) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$
   et donc l'intégrale ne peut pas converger.
   SECOND CAS : si la limite vaut $\pm\infty$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   $$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq 17.$$
   Et on conclut comme dans le premier cas.
3. Une nouvelle fois, raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x)$ ne tend pas vers 0 et que f est uniformément continue. Montrons que l'intégrale diverge. La fonction ne tend pas vers 0 , d'où : il existe un réel $\varepsilon > 0$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) > \epsilon.$$
   Par la continuité uniforme, pour cet epsilon :
   $$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x_n - x| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{d'où } |f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
   On peut ensuite extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > u_{n-1} + \alpha.$$
   Finalement :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{u_n+\frac{\alpha}{2}} f(x)dx \geq n\alpha\frac{\epsilon}{2} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$
   L'intégrale ne peut donc pas converger.