

D.S. N° 3 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

EXERCICE

La fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ est appelée le **gudermannien**.

1. Montrer que les intégrales impropres

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt$$

sont convergentes.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt.$$

3. Quelle est la valeur de l'intégrale I ?
 4. Dresser le tableau des variations de la fonction F et tracer la courbe d'équation $y = F(x)$ ainsi que ses asymptotes.

5. On rappelle que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

6. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_k = \int_0^{+\infty} t e^{-kt} dt$.

7. Montrer que $J = 2 \sum_{p=0}^n J_{2p+1} + R_n$,

$$\text{où } R_n = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^{-(2n+1)t} dt.$$

8. Montrer que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2n+1}$.
 9. Quelle est la valeur de l'intégrale J ?

PROBLÈME – ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Notations

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

On pose $J_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour chaque entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, \dots , $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

Partie A - Étude d'un exemple

Pour chaque complexe β , on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta + 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta + 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_β .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre β la matrice A_β est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que la matrice A_0 est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
4. Montrer que la matrice A_0 est semblable à la matrice J_3 .
5. On suppose que $\beta \neq 0$. La matrice A_β est-elle nilpotente ?

Partie B - Matrices nilpotentes (anti)symétriques

Soient u un endomorphisme nilpotent du \mathbb{C} -espace vectoriel E et p son indice.

6. Montrer que le spectre de u est égal à $\{0\}$.
7. Montrer que la trace de u est nulle.
8. Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\text{tr}(M^T M)$ et en déduire qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.
9. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont antisymétriques et nilpotentes.
10. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
11. Soient \mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans \mathcal{N} . Montrer que $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
12. Exhiber un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans \mathcal{N} et de dimension égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie C - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice p .

13. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.
Dans la suite, on note a un tel vecteur et \mathcal{B}_a la famille libre $(u^k(a))_{0 \leq k \leq p-1}$.
14. Montrer que l'indice p de u est inférieur ou égal à la dimension n de E .
15. Montrer que le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille \mathcal{B}_a est stable par u .
16. Soit v l'endomorphisme induit par u sur C_a . Déterminer la matrice de v dans la base \mathcal{B}_a .
17. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{C}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $Q \mapsto Q'$. Montrer qu'il existe exactement $p+1$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ (que l'on déterminera) stables par l'endomorphisme f .
18. Construire une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_p .
19. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de C_a stables par u .

Partie D - Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice $p \leq 2$

20. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?
21. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A est nilpotente si, et seulement si, son déterminant et sa trace sont nuls.

On suppose dans la suite que la dimension n de E est supérieure ou égale à 3. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

22. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et que $2r \leq n$.
23. On suppose que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_r de E tels que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .
24. Exprimer la matrice de u dans cette base. (On utilisera les matrices J_α et la notation diag indiquées au début de l'énoncé.)
25. On suppose $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_r de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\text{Ker}(u)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .
26. Quelle est la matrice de u dans cette base ?