D.S. N° 3 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

EXERCICE

On étudie la fonction H définie par $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

1. Montrer que, pour tout $x > -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur.
2. Montrer que, pour tout $x \leq -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt$ diverge.
3. Montrer que $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ est défini si, et seulement si, $x > -1$.
4. Montrer que la fonction H est monotone sur $]-1, +\infty[$. Préciser le signe de $\mathrm{H}(x)$ pour tout $x > -1$.
5. Montrer que la fonction $g \,:\, t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 0^+ et en 1^-.
6. En déduire qu'il existe un réel M tel que $\forall x > 0,\ \mathrm{H}(x) \leq \dfrac{\mathrm{M}}{x}$.
7. Montrer que $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.
8. Soit $x > -1$. Calculer $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Montrer que la série $\sum \frac{1}{(x+k)^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \mathrm{H}(x)$.
9. Soit $x > -1$. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} \leq \mathrm{H}(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
10. En déduire un équivalent de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
11. Etudier la nature de la série numérique $\sum \mathrm{H}(n)$.
12. Montrer que la série numérique $\sum (-1)^n \mathrm{H}(n)$ est convergente.
13. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{H}(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt$.
14. A l'aide d'un changement de variable, déterminer la valeur de cette intégrale en fonction de $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Problème – Endomorphismes nilpotents

Notations

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

On pose $\mathrm{J}_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour chaque entier $\alpha \geqslant 2$, $\mathrm{J}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, \mathrm{A}_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

Partie A - Étude d'un exemple

Pour chaque complexe β, on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ par :

$$\mathrm{A}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_β.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre β la matrice A_β est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que la matrice A_0 est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
4. Montrer que la matrice A_0 est semblable à la matrice J_3.
5. On suppose que $\beta \neq 0$. La matrice A_β est-elle nilpotente ?

Partie B - Matrices nilpotentes (anti)symétriques

Soient u un endomorphisme nilpotent du $\mathbb{C}-$espace vectoriel E et p son indice.

6. Montrer que le spectre de u est égal à $\{0\}$.
7. Montrer que la trace de u est nulle.
8. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M})$ et en déduire qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.
9. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont antisymétriques et nilpotentes.
10. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
11. Soient $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
12. Exhiber un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$ et de dimension égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie C - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

13. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

    Dans la suite, on note a un tel vecteur et $\mathcal{B}_a$ la famille libre $\left(u^k(a)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$.
14. Montrer que l'indice p de u est inférieur ou égal à la dimension n de E.
15. Montrer que le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille $\mathcal{B}_a$ est stable par u.
16. Soit v l'endomorphisme induit par u sur C_a. Déterminer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_a$.
17. Soit l'endomorphisme $f\ :\ \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}],\ \ \mathrm{Q} \mapsto \mathrm{Q}'$. Montrer qu'il existe exactement $p+1$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ (que l'on déterminera) stables par l'endomorphisme f.
18. Construire une base de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_p.
19. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de C_a stables par u.

Partie D - Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice $p \leq 2$

20. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

21. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A est nilpotente si, et seulement si, son déterminant et sa trace sont nuls.

    On suppose dans la suite que la dimension n de E est supérieure ou égale à 3. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

22. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1,\ e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

24. Exprimer la matrice de u dans cette base. (On utilisera les matrices J_α et la notation diag indiquées au début de l'énoncé.)

25. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1,\ e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

26. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Partie E - Matrices toutes-puissantes

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *toute-puissante* si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^k$.

27. Montrer que, si une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente et toute-puissante, alors elle est nulle.
28. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que, au voisinage de 0 : $\mathrm{V}(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Démontrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{V} = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$.
29. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que, au voisinage de 0 :
$$1 + x = (\mathrm{U}(x))^p + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
30. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $1 + \mathrm{X} = \mathrm{U}^p + \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$.
31. Soit une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Démontrer que la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ est toute-puissante.
32. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. Montrer que la matrice $\lambda\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ est toute-puissante.
33. En déduire que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toute-puissante.