Corrigé du D.S. n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques

Exercice

1. L'intégrale I est impropre en $+\infty$. Or $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\mathrm{e}^t}$ qui ne change pas de signe et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. Donc l'intégrale I converge.

   L'intégrale J est impropre en 0 et en $+\infty$: elle converge si, et seulement si, les intégrales $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$ et $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$ convergent.

   L'intégrale K est impropre en 0. Or $\dfrac{t}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{2t}{(1+t+t\varepsilon(t)) - (1-t+t\varepsilon(t))} = \dfrac{1}{1+\varepsilon(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, d'où l'intégrale K est faussement impropre, donc elle converge.
   L'intégrale L est impropre en $+\infty$. Or $\dfrac{t}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{\mathrm{e}^t}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t}\,dt$ converge car $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = t\mathrm{e}^{-t/2}\cdot \mathrm{e}^{-t/2} = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t/2})$ et $\mathrm{e}^{-t/2}$ ne change pas de signe et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,dt$ converge. D'où l'intégrale L converge.
   Donc l'intégrale J converge.

2. On pose le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$: $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = 2\dfrac{u}{u^2+1}$ et $du = u\,dt$, donc $F(x) = 2\int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u^2+1} = [2\arctan(u)]_1^{\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$.

3. $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

4. La fonction F est impaire. Et elle est dérivable car c'est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t}$.
   La fonction F est strictement croissante car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} > 0$.
   Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\frac{\pi}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$+$	
$F(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\pi/2$

   Voir la figure 1

5. On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ en sommant par paquets (c'est possible car la série converge absolument). D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

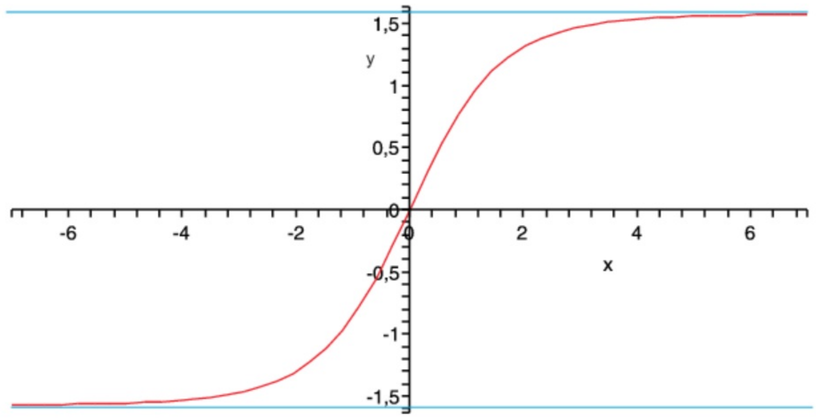

Figure 1

6. Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-kt}}{-k}$ et $t \mapsto t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on intègre par partie : $J_k = \left[t\dfrac{e^{-kt}}{-k}\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \dfrac{e^{-kt}}{-k}\,dt = -\dfrac{x}{k}e^{-kx} + \dfrac{1}{k^2}(1 - e^{-kx}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k^2}$ car $xe^{-kx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Pour tout $t > 0$, $\dfrac{t}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2te^{-t}}{1 - e^{-2t}}$ et $\dfrac{1 - e^{-(2n+2)t}}{1 - e^{-2t}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} e^{-2pt}$ (car c'est une somme géométrique de raison e^{-2t} différente de 1), donc $J = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} + R_n$.

8. $R_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2t}{e^{2t} - 1} e^{-(2n+1)t}\,dt$. Or $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $e^{2t} - 1 \geq 2t$.
Donc $R_n \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\,dt = \dfrac{1}{2n+1}$.

9. $J - 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} = R_n$ et $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $J - 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J$, donc $J = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1} = 2\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$. Donc $\boxed{J = \dfrac{\pi^2}{4}.}$

Problème – Endomorphismes nilpotents

Les parties B, C et D sont extraites de Centrale 2019 PSI Mathématiques 2.

Partie A - Étude d'un exemple

1. Le polynôme caractéristique $\det(XI_3 - A_\beta)$ de la matrice A_β est

$$\begin{vmatrix} X & 0 & -\beta-1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 1 & -1 & X-\beta-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} X \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\beta-1 \\ 1 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X-\beta-1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{=} X \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\beta-1 \\ 0 & X+1 & \beta+1 \\ 0 & -1 & X-\beta-1 \end{vmatrix}$$
$$= X \cdot \begin{vmatrix} X+1 & \beta+1 \\ -1 & X-\beta-1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_2+L_1}{=} X \cdot \begin{vmatrix} X & X \\ -1 & X-\beta-1 \end{vmatrix} = X^2(X-\beta).$$

2. Du polynôme caractéristique, on déduit que :
   - si $\beta = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A_0) = \{0\}$. La matrice A_0 n'est pas diagonalisable car (par l'absurde) : si A_0 est diagonalisable, alors A est semblable à (0), donc égale à (0).
   - si $\beta \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(A_\beta) = \{0; \beta\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim SEP(0) \leq 2 \\ 1 \leq \dim SEP(\beta) \leq 1 \end{cases}$. Or la matrice A_β est diagonalisable *ssi* $\dim SEP(0) + \dim SEP(\beta) = 3$, la taille de A_β ; *ssi* $\dim SEP(0) = 2$.

     Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$: $X \in SEP(0) \iff \begin{cases} (\beta+1)z = 0 \\ y = x \end{cases}$.

     — si $\beta = -1$, alors $X \in SEP(0) \iff y = x$, d'où $\dim SEP(0) = 2$;

     — si $\beta \neq -1$, alors $X \in SEP(0) \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$, d'où $\dim SEP(0) = 1$.

   Autre méthode : la matrice A_β est :
   — de rang 2 si $\beta \neq -1$, alors $\dim SEP(0) = 1$;
   — de rang 1 si $\beta = -1$, alors $\dim SEP(0) = 2$.

   Donc $\boxed{\text{la matrice } A_\beta \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } \beta = -1.}$

3. On calcule : $A_0^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle et $A_0^3 = A_0^2 \cdot A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donc $\boxed{\text{la matrice } A_0 \text{ est nilpotente et son indice de nilpotence vaut 3.}}$

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:
   - $A_0X = 0 \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - $A_0X = V_3 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 + y \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - $A_0X = V_2 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont linéairement indépendants car la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $\det(P) = 1 \neq 0$, est inversible. Enfin $P^{-1} \cdot A_0 \cdot P = J_3$ par construction, donc $\boxed{A_0 \text{ et } J_3 \text{ sont semblables.}}$

5. On suppose que $\beta \neq 0$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Sp}(A_\beta) = \{0; \beta\}$. Si A_β est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_\beta^p = (0)$. Toute valeur propre λ de A_β vérifie alors $\lambda^p = 0$ et est donc nulle. C'est absurde car β est une valeur propre non nulle de A_β. Donc $\boxed{A_\beta \text{ n'est pas nilpotente si } \beta \neq 0.}$

Partie B - Matrices nilpotentes (anti)symétriques

6. Le polynôme X^p est annulateur de u, d'où le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de u appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et a donc au moins une racine, donc le spectre de u n'est pas vide. Finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

7. Comme toute matrice dans $\mathbb{C}$, celle de l'endomorphisme u dans une base du $\mathbb{C}-$ espace vectoriel E est trigonalisable. Et tous les éléments diagonaux sont des valeurs propres de u, par suite ils sont nuls. Donc la trace de u est nulle.
Autre méthode : Le polynôme caractéristique de u est X^n, or $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{tr}(u) = 0.}$

8. Pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(M^T M)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$, d'où $(M^T M)_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2$, donc $\boxed{\mathrm{tr}(M^T M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2}$ est la somme des carrés de tous les coefficients réels de la matrice. En particulier, elle est nulle si, et seulement si, la matrice M est nulle. Or :
   — si M est symétrique, alors $M^T = M$, d'où $\mathrm{tr}(M^T M) = \mathrm{tr}(M^2)$;
   — si M est nilpotente, alors M^2 l'est aussi, d'où $\mathrm{tr}(M^2) = 0$ d'après la question précédente.

   D'où, si M est symétrique et nilpotente, alors $\mathrm{tr}(M^T M) = 0$, d'où M est la matrice nulle. Réciproquement, si M est nulle, alors M est à la fois symétrique et nilpotente.
   Donc $\boxed{\text{une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est symétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.}}$

9. De même, si M est antisymétrique, alors $\mathrm{tr}(M^T M) = -\mathrm{tr}(M^2)$. Si M est nilpotente, alors M^2 l'est aussi, d'où $\mathrm{tr}(M^2) = 0$. Par suite $\mathrm{tr}(M^T M) = 0$, donc $M = 0$.
   Réciproquement, si $M = (0)$, alors M est à la fois antisymétrique et nilpotente.
   Donc $\boxed{\text{une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est antisymétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.}}$

10. Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est formée des $\frac{n(n+1)}{2}$ matrices $E_{ij}+E_{ji}$ où $j \geq i$. Donc $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. De la question 8, il résulte que $\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{(0)\}$ et par suite $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{(0)\}$. Les sous-espaces vectoriels V et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe. Or $V \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où $\dim V + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \leq n^2$. Donc, en utilisant la question précédente, $\boxed{\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.}$

12. Les matrices M strictement triangulaires supérieures, c'est-à-dire telles que $m_{ij} = 0$ si $i \geq j$, forment un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et sont nilpotentes.

Partie C - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

13. $u^{p-1} \neq 0$ car l'indice de nilpotence de u est p. Par suite, il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
Soient p complexes $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}$ tels que $\alpha_0 x + \cdots \alpha_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$. En appliquant u^{p-1}, il vient $\alpha_0 u^{p-1}(x) = 0_E$ car $u^p = 0$. D'où $\alpha_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. De même, en appliquant successivement $u^{p-2}, \cdots, u$, les autres scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ sont nuls. Donc la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.

14. La famille $\mathcal{B}_a$ est une famille libre de p vecteurs de E, espace vectoriel de dimension n, d'où $\boxed{p \leq n.}$

15. La famille $\mathcal{B}_a$ est une base du sous-espace vectoriel C_a. Chaque vecteur $u^k(a)$ de cette base a pour image le vecteur $u\left(u^k(a)\right) = u^{k+1}(a)$ qui appartient au sous-espace vectoriel C_a car : c'est un vecteur de la famille $\mathcal{B}_a$ si $k < p-1$ et c'est le vecteur nul si $k = p-1$.
Donc $\boxed{\text{le sous-espace vectoriel } C_a \text{ engendré par la famille } \mathcal{B}_a \text{ est stable par } u.}$

16. Pour chaque $k \in [\![0, p-2]\!]$, $v\left(u^k(a)\right) = u\left(u^k(a)\right) = u^{k+1}(a)$ et $v\left(u^{p-1}(a)\right) = u^p(a) = 0_E$, donc
$\boxed{\text{la matrice de } v \text{ dans la base } \mathcal{C}_a \text{ est } J_p.}$

17. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$, $\deg(Q') \leq \deg(Q)$, d'où :
$\boxed{\text{les } p+1 \textit{ sev } \{0_{\mathbb{C}[X]}\},\ \mathbb{C}_0[X], \cdots, \mathbb{C}_{p-1}[X] \text{ sont stables par la dérivation } f. \text{ Et ce sont les seuls.}}$
En effet : si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$, alors l'ensemble des degrés des polynômes de F est une partie de $\mathbb{N}$ majorée (par $p-1$), donc elle possède un maximum d. Soit alors un polynôme $Q \in F$ de degré d. Si F est stable par f, alors les $d+1$ polynômes $Q,\ Q', \cdots, Q^{(d)}$ appartiennnent à F. Et ils sont de degrés $d,\ d-1, \cdots, 0$ respectivement. D'où $F = \mathbb{C}_d[X]$.

18. Soit, pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, le polynôme $Q_k = \frac{1}{k!} X^k$. La dérivée de Q_k est $f(Q_k) = \frac{k}{k!} X^{k-1} = Q_{k-1}$ si $k \geq 1$ et $f(Q_0) = f(1) = 0$.
$\boxed{\text{Dans la base } (Q_{p-1}, \cdots, Q_1, Q_0) = \left(\frac{X^{p-1}}{(p-1)!}, \cdots, X, 1\right), \text{ la matrice de } f \text{ est donc } J_p.}$

19. La matrice J_p est :
    - la matrice de l'endomorphisme v dans la base $\left(a, u(a), \cdots, u^{p-1}(a)\right)$ d'après la question 16 ;
    - la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\left(\frac{X^{p-1}}{(p-1)!}, \cdots, X, 1\right)$ d'après la question 18.

    Soit l'isomorphisme de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ vers C_a qui, pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, associe au polynôme $\frac{X^k}{k!}$ le vecteur $u^{p-1-k}(a)$.
    Cet isomorphisme associe, aux $p+1$ *sev* $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, $\mathbb{C}_0[X] = \mathrm{Vect}(X^0), \cdots, \mathbb{C}_{p-1}[X] = \mathrm{Vect}(X^0, \cdots, X^{p-1})$ stables par la dérivation f, les $p+1$ *sev* $\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(u^{p-1}(a)), \cdots, \mathrm{Vect}(u^{p-1}(a), \cdots, a)$ stables par v. Donc

    $$\boxed{\text{les } sev \text{ de } C_a \text{ stables par } u \text{ sont les } p+1 \ sev\ \{0_E\} \text{ et } F_k = \mathrm{Vect}\left(u^{p-1}(a), \cdots, u^{p-1-k}(a)\right), \text{ où } k \in [\![0, p-1]\!].}$$

Partie D - Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice $p \leq 2$

20. Un endorphisme est nilpotent d'indice 1 si, et seulement si, il est nul car $u^1 = 0$ et $u^0 = \mathrm{id}_E \neq 0$.
21. Si la matrice A est nilpotente, alors :
    - le spectre de A contient 0 d'après la question 6, d'où le déterminant de A est nul ;
    - la trace de A est nulle d'après la question 7.

    Réciproquement, si le déterminant et la trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont nuls, alors $\begin{cases} ad - bc = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$.
    Or $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = 0$, donc A est nilpotente.
    (Autre méthode : si $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$, alors le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est annulateur de A, donc $A^2 = 0$.)
22. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists x \in E,\ y = u(x)$ d'où $u(y) = u^2(x) = 0$ d'où $y \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$

    Par suite, $r = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par le théorème du rang, $r + r \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = n$, donc $\boxed{2r \leq n.}$
23. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H. Montrons que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ dans $\mathbb{C}^r$ tels que
    $$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) = 0 \quad (*).$$
    En appliquant u à cette égalité, il vient que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$ car $u^2 = 0$. Par linéarité de u, $0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r)$. Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ car la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. L'équation $(*)$ devient alors
    $$\mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) = 0.$$
    Et, de même, le vecteur $\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Finalement, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E}$ car cette famille est libre et de cardinal $2r = \dim(E)$.

24. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ la base de E obtenue dans la question précédente. Pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$, u envoie e_k sur $u(e_k)$. Et $u^2 = 0$, d'où $u(u(e_k)) = 0$.

    Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\operatorname{diag}(J_2, \dots, J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

25. Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H. Comme dans la question 23, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est libre. Elle est de cardinal r et ses vecteurs appartiennent tous à $\operatorname{Ker}(u)$ car $u^2 = 0$. Or $\operatorname{Ker}(u)$ est de dimension $n - r > r$ car $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\operatorname{Ker}(u)$, en rajoutant $(n-r)-r = n - 2r$ vecteurs de $\operatorname{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1, \dots, v_{n-2r})$.
    La décomposition $E = H \oplus \operatorname{Ker}(u)$ montre que, en concaténant la base $(e_1, \dots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ de $\operatorname{Ker}(u)$, on obtient une base de E.

    En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}) \text{ est une base } \mathcal{B} \text{ de } E.}$

26. Pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$, u envoie e_k sur $u(e_k)$ et $u(u(e_k)) = 0$ car $u^2 = 0$. De plus les vecteurs $v_1, \dots, v_{n-2r}$ appartiennent à $\operatorname{Ker}(u)$ donc $\forall k \in [\![1, n-2r]\!],\ u(v_k) = 0$.
    On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

    $$\boxed{\operatorname{diag}(J_2, \dots, J_2, (0)_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2 \text{ suivis de la matrice nulle } (0)_{n-2r} \text{ de } \mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C}).}$$