Corrigé du D.S. n° 3 de mathématiques

Exercice (d'après E3A Math 2 PSI 2016)

1. L'intégrale est impropre en 0. Soit $y > 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_y^1 t^x \ln(t)\, dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\ln(t)\right]_y^1 - \frac{1}{x+1}\int_y^1 t^x\, dt$$

car les fonctions ln et $t \mapsto \frac{t^{x+1}}{x+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Le terme entre crochets a pour limite 0 quand y tend vers 0, par croissances comparées (car $x > -1$). Et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x\, dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 (car $x > -1$) et vaut $\frac{1}{x+1}$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt \text{ converge et vaut } -\tfrac{1}{(x+1)^2}.}$

2. L'intégrale est impropre en 0. Et $t^x \underset{t\to 0}{=} o(t^x \ln t)$. Or $t^x \ln(t)$ ne change pas de signe et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x\, dt$ diverge d'après le critère de Riemann en 0, car $x \leq -1$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt \text{ diverge.}}$

3. L'intégrale est impropre en 0 et en 1, d'où elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ convergent.

   D'une part, $\dfrac{t^x \ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t^x \ln(t)$ qui ne change pas de signe. Or $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$ d'après les questions 1 et 2. D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

   D'autre part, $\dfrac{t^x \ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ car elle est faussement impropre.

   Donc $\boxed{\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt \text{ est défini si, et seulement si, } x > -1.}$

4. L'intégrande est positif car c'est le produit de t^x positif, de $\ln(t)$ négatif et de $\frac{1}{t-1}$ négatif. On intègre de 0 à 1 : par croissance de l'intégrale, $\boxed{\mathrm{H}(x) \text{ est positif pour tout } x > -1.}$

Si $x \leq y$ alors pour tout $t \in]0,1[$, $t^x = \exp(x\ln(t)) \geq \exp(y\ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \leq 0$ et exp est croissante). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \geq 0$ et on intégre sur $]0,1[$. D'où : si $-1 < x \leq y$, $\mathrm{H}(x) \geq \mathrm{H}(y)$ par croissance de l'intégrale. Donc $\boxed{\text{la fonction H est décroissante sur }]-1,+\infty[.}$

5. $g(t) = \dfrac{t\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Et $g(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$ car $\dfrac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$.
6. Ainsi prolongée, la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée. Soit alors M un majorant de g sur $[0,1]$: $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{t^x \ln t}{t-1} \leq \mathrm{M}t^{x-1}$.

   Par croissance de l'intégrale, $\boxed{\mathrm{H}(x) \leq \displaystyle\int_0^1 \mathrm{M}t^{x-1}\,dt = \frac{\mathrm{M}}{x} \text{ pour tout } x > 0.}$
7. $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\,dt = -\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt = \frac{1}{(x+1)^2}$ d'après la question 1. Donc $\boxed{\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}.}$
8. Par télescopage, $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\mathrm{H}(x+k-1) - \mathrm{H}(x+k)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or la suite $\mathrm{H}(x+n)$ tend vers 0 car, d'après les questions 4 et 6, $0 \leq \mathrm{H}(x+n) \leq \dfrac{\mathrm{M}}{x+n}$ pour tout $n \geq 2$. Or $\dfrac{\mathrm{M}}{x+n}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Donc $\boxed{\text{la série } \sum \tfrac{1}{(x+k)^2} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \mathrm{H}(x).}$
9. Soient $x > -1$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ est continue et décroissante, d'où, en comparant série et intégrale :

$$\left[\frac{-1}{x+t}\right]_1^{\mathrm{N}+1} = \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{(x+t)^2}\,dt \leq \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(x+1)^2} + \int_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{(x+t)^2}\,dt = \frac{1}{(x+1)^2} + \left[\frac{-1}{x+t}\right]_1^{\mathrm{N}}.$$

   Les inégalités larges passent à la limite $\mathrm{N} \to \infty$, donc $\dfrac{1}{x+1} \leq \mathrm{H}(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
10. On divise par $\frac{1}{x+1} > 0$ chaque membre de l'encadrement précédent : $1 \leq \frac{\mathrm{H}(x)}{\frac{1}{x+1}} \leq 1 + \dfrac{1}{(x+1)}$. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{\mathrm{H}(x)}{\frac{1}{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\boxed{\mathrm{H}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}.}$
11. $\mathrm{H}(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc $\boxed{\text{la série } \sum \mathrm{H}(n) \text{ diverge.}}$
12. La suite $\mathrm{H}(n)$ tend vers 0, en décroissant d'après la question 4. Donc, d'après le théorème des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n \mathrm{H}(n) \text{ est convergente.}}$

13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{H}(k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1\frac{t^k\ln(t)}{t-1}\,dt=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t-1}\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\,dt=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t-1}\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{H}(k)=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt.$

Dans cette égalité, $\displaystyle 0\leq\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt\leq\mathrm{H}(n+1)$ car $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{1-t}$ pour tout $t\in]0,1[$. Or la suite $\mathrm{H}(n+1)$ tend vers 0. D'où, d'après le théorème des gendarmes, la suite $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ tend vers 0. Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{H}(n)=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.}$

14. La fonction $t\mapsto t^2$ étant de classe C^1 et strictement monotone sur $]0,1[$, on peut effectuer le changement de variable $u=t^2$ pour obtenir

$$\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt=\int_0^1\frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{4}\mathrm{H}(-1/2)$$

Problème – Endomorphismes nilpotents

Les parties B, C et D sont extraites de Centrale 2019 PSI Math 2. La partie E est extraite de CCINP 2013 MP Math 2.

Partie A - Étude d'un exemple

1. Le polynôme caractéristique $\det(\mathrm{XI}_3-\mathrm{A}_\beta)$ de la matrice A_β est

$$\begin{vmatrix}\mathrm{X}&0&-\beta-1\\-1&\mathrm{X}+1&0\\1&-1&\mathrm{X}-\beta-1\end{vmatrix}\underset{\mathrm{C}_1\leftarrow\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2}{=}\mathrm{X}\cdot\begin{vmatrix}1&0&-\beta-1\\1&\mathrm{X}+1&0\\0&-1&\mathrm{X}-\beta-1\end{vmatrix}\underset{\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1}{=}\mathrm{X}\cdot\begin{vmatrix}1&0&-\beta-1\\0&\mathrm{X}+1&\beta+1\\0&-1&\mathrm{X}-\beta-1\end{vmatrix}$$
$$=\mathrm{X}\cdot\begin{vmatrix}\mathrm{X}+1&\beta+1\\-1&\mathrm{X}-\beta-1\end{vmatrix}\underset{\mathrm{L}_1\leftarrow\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1}{=}\mathrm{X}\cdot\begin{vmatrix}\mathrm{X}&\mathrm{X}\\-1&\mathrm{X}-\beta-1\end{vmatrix}=\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-\beta).$$

2. Du polynôme caractéristique, on déduit que :
   - si $\beta=0$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_0)=\{0\}$. La matrice A_0 n'est pas diagonalisable car (par l'absurde) : si A_0 est diagonalisable, alors A est semblable à (0), donc égale à (0).
   - si $\beta\neq0$, alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_\beta)=\{0;\beta\}$ et $\begin{cases}1\leq\dim\mathrm{SEP}(0)\leq2\\1\leq\dim\mathrm{SEP}(\beta)\leq1\end{cases}$. Or la matrice A_β est diagonalisable *ssi* $\dim\mathrm{SEP}(0)+\dim\mathrm{SEP}(\beta)=3$, la taille de A_β ; *ssi* $\dim\mathrm{SEP}(0)=2$.

     Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$: $\mathrm{X}\in\mathrm{SEP}(0)\iff\begin{cases}(\beta+1)z=0\\y=x\end{cases}$.

     — si $\beta=-1$, alors $\mathrm{X}\in\mathrm{SEP}(0)\iff y=x$, d'où $\dim\mathrm{SEP}(0)=2$;

— si $\beta \neq -1$, alors $\mathrm{X} \in \mathrm{SEP}(0) \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$, d'où $\dim \mathrm{SEP}(0) = 1$.

Autre méthode : la matrice A_β est :

- de rang 2 si $\beta \neq -1$, alors $\dim \mathrm{SEP}(0) = 1$;
- de rang 1 si $\beta = -1$, alors $\dim \mathrm{SEP}(0) = 2$.

Donc $\boxed{\text{la matrice } \mathrm{A}_\beta \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } \beta = -1.}$

3. On calcule : $\mathrm{A}_0^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle et $\mathrm{A}_0^3 = \mathrm{A}_0^2 \cdot \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donc $\boxed{\text{la matrice } \mathrm{A}_0 \text{ est nilpotente et son indice de nilpotence vaut 3.}}$

4. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

   - $\mathrm{A}_0\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \iff \mathrm{X} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $\mathrm{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - $\mathrm{A}_0\mathrm{X} = \mathrm{V}_3 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 + y \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - $\mathrm{A}_0\mathrm{X} = \mathrm{V}_2 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont linéairement indépendants car la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $\det(\mathrm{P}) = 1 \neq 0$, est inversible. Enfin $\mathrm{P}^{-1} \cdot \mathrm{A}_0 \cdot \mathrm{P} = \mathrm{J}_3$ par construction, donc $\boxed{\mathrm{A}_0 \text{ et } \mathrm{J}_3 \text{ sont semblables.}}$

5. On suppose que $\beta \neq 0$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_\beta) = \{0; \beta\}$. Si A_β est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}_\beta^p = (0)$. Toute valeur propre λ de A_β vérifie alors $\lambda^p = 0$ et est donc nulle. C'est absurde car β est une valeur propre non nulle de A_β. Donc $\boxed{\mathrm{A}_\beta \text{ n'est pas nilpotente si } \beta \neq 0.}$

Partie B - Matrices nilpotentes (anti)symétriques

6. Le polynôme X^p est annulateur de u, d'où le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de X^p, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de u appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et a donc au moins une racine, donc le spectre de u n'est pas vide. Finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

7. Comme toute matrice dans $\mathbb{C}$, celle de l'endomorphisme u dans une base du $\mathbb{C}-$ espace vectoriel E est trigonalisable. Et tous les éléments diagonaux sont des valeurs propres de u, par suite ils sont nuls. Donc la trace de u est nulle.
AUTRE MÉTHODE : Le polynôme caractéristique de u est X^n, or $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{tr}(u) = 0.}$

8. Pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(M^T M)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$, d'où $(M^T M)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2$, donc $\boxed{\mathrm{tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2}$ est la somme des carrés de tous les coefficients réels de la matrice. En particulier, elle est nulle si, et seulement si, la matrice M est nulle. Or :
   — si M est symétrique, alors $M^T = M$, d'où $\mathrm{tr}(M^T M) = \mathrm{tr}(M^2)$;
   — si M est nilpotente, alors M^2 l'est aussi, d'où $\mathrm{tr}(M^2) = 0$ d'après la question précédente.

   D'où, si M est symétrique et nilpotente, alors $\mathrm{tr}(M^T M) = 0$, d'où M est la matrice nulle. Réciproquement, si M est nulle, alors M est à la fois symétrique et nilpotente.

   Donc $\boxed{\text{une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est symétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.}}$

9. De même, si M est antisymétrique, alors $\mathrm{tr}(M^T M) = -\mathrm{tr}(M^2)$. Si M est nilpotente, alors M^2 l'est aussi, d'où $\mathrm{tr}(M^2) = 0$. Par suite $\mathrm{tr}(M^T M) = 0$, donc $M = 0$.
Réciproquement, si $M = (0)$, alors M est à la fois antisymétrique et nilpotente.

   Donc $\boxed{\text{une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est antisymétrique et nilpotente si, et seulement si, elle est nulle.}}$

10. Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est formée des $\frac{n(n+1)}{2}$ matrices $E_{ij} + E_{ji}$ où $j \geq i$. Donc $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. De la question 8, il résulte que $\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{(0)\}$ et par suite $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{(0)\}$. Les sous-espaces vectoriels V et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe. Or $V \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où $\dim V + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \leq n^2$. Donc, en utilisant la question précédente, $\boxed{\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.}$

12. Les matrices M strictement triangulaires supérieures, c'est-à-dire telles que $m_{ij} = 0$ si $i \geq j$, forment un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et sont nilpotentes.

Partie C - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

13. $u^{p-1} \neq 0$ car l'indice de nilpotence de u est p. Par suite, il existe au moins un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
Soient p complexes $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}$ tels que $\alpha_0 x + \cdots \alpha_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$. En appliquant u^{p-1}, il vient $\alpha_0 u^{p-1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$ car $u^p = 0$. D'où $\alpha_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. De même, en appliquant successivement $u^{p-2}, \cdots, u$, les autres scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ sont nuls. Donc la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.

14. La famille $\mathcal{B}_a$ est une famille libre de p vecteurs de E, espace vectoriel de dimension n, d'où $\boxed{p \leq n.}$

15. La famille $\mathcal{B}_a$ est une base du sous-espace vectoriel C_a. Chaque vecteur $u^k(a)$ de cette base a pour image le vecteur $u\left(u^k(a)\right) = u^{k+1}(a)$ qui appartient au sous-espace vectoriel C_a car : c'est un vecteur de la famille $\mathcal{B}_a$ si $k < p-1$ et c'est le vecteur nul si $k = p-1$.

Donc $\boxed{\text{le sous-espace vectoriel } \mathrm{C}_a \text{ engendré par la famille } \mathcal{B}_a \text{ est stable par } u.}$

16. Pour chaque $k \in [\![0, p-2]\!]$, $v\left(u^k(a)\right) = u\left(u^k(a)\right) = u^{k+1}(a)$ et $v\left(u^{p-1}(a)\right) = u^p(a) = 0_{\mathrm{E}}$, donc

$\boxed{\text{la matrice de } v \text{ dans la base } \mathcal{C}_a \text{ est } \mathrm{J}_p.}$

17. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\deg(\mathrm{Q}') \leq \deg(\mathrm{Q})$, d'où :

$\boxed{\text{les } p+1 \textit{ sev } \{0_{\mathbb{C}[\mathrm{X}]}\},\ \mathbb{C}_0[\mathrm{X}], \cdots, \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}] \text{ sont stables par la dérivation } f. \text{ Et ce sont les seuls.}}$

En effet : si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$, alors l'ensemble des degrés des polynômes de F est une partie de $\mathbb{N}$ majorée (par $p-1$), donc elle possède un maximum d. Soit alors un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathrm{F}$ de degré d. Si F est stable par f, alors les $d+1$ polynômes Q, $\mathrm{Q}', \cdots, \mathrm{Q}^{(d)}$ appartiennnent à F. Et ils sont de degrés $d,\ d-1, \cdots, 0$ respectivement. D'où $\mathrm{F} = \mathbb{C}_d[\mathrm{X}]$.

18. Soit, pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, le polynôme $\mathrm{Q}_k = \frac{1}{k!}\mathrm{X}^k$. La dérivée de Q_k est $f(\mathrm{Q}_k) = \frac{k}{k!}\mathrm{X}^{k-1} = \mathrm{Q}_{k-1}$ si $k \geq 1$ et $f(\mathrm{Q}_0) = f(1) = 0$.

$\boxed{\text{Dans la base } (\mathrm{Q}_{p-1}, \cdots, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_0) = \left(\frac{\mathrm{X}^{p-1}}{(p-1)!}, \cdots, \mathrm{X}, 1\right), \text{ la matrice de } f \text{ est donc } \mathrm{J}_p.}$

19. La matrice J_p est :
    - la matrice de l'endomorphisme v dans la base $\left(a, u(a), \cdots, u^{p-1}(a)\right)$ d'après la question 16 ;
    - la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\left(\frac{\mathrm{X}^{p-1}}{(p-1)!}, \cdots, \mathrm{X}, 1\right)$ d'après la question 18.

Soit l'isomorphisme de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ vers C_a qui, pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, associe au polynôme $\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ le vecteur $u^{p-1-k}(a)$.
Cet isomorphisme associe, aux $p+1$ *sev* $\{0_{\mathbb{C}[\mathrm{X}]}\}$, $\mathbb{C}_0[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^0), \cdots,\ \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^0, \cdots, \mathrm{X}^{p-1})$ stables par la dérivation f, les $p+1$ *sev* $\{0_{\mathrm{E}}\}$, $\mathrm{Vect}(u^{p-1}(a)), \cdots,\ \mathrm{Vect}(u^{p-1}(a), \cdots, a)$ stables par v.
Donc

$\boxed{\text{les } \textit{sev} \text{ de } \mathrm{C}_a \text{ stables par } u \text{ sont les } p+1 \textit{ sev } \{0_{\mathrm{E}}\} \text{ et } \mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\left(u^{p-1}(a), \cdots, u^{p-1-k}(a)\right), \text{ où } k \in [\![0, p-1]\!].}$

Partie D - Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice $p \leq 2$

20. Un endorphisme est nilpotent d'indice 1 si, et seulement si, il est nul car $u^1 = 0$ et $u^0 = \mathrm{id}_E \neq 0$.
21. Si la matrice A est nilpotente, alors :
    — le spectre de A contient 0 d'après la question 6, d'où le déterminant de A est nul ;
    — la trace de A est nulle d'après la question 7.

    Réciproquement, si le déterminant et la trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont nuls, alors $\begin{cases} ad - bc = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$.

    Or $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + bd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = 0$, donc A est nilpotente.

    (Autre méthode : si $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$, alors le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est annulateur de A, donc $A^2 = 0$.)
22. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists x \in E,\ y = u(x)$ d'où $u(y) = u^2(x) = 0$ d'où $y \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$

    Par suite, $r = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par le théorème du rang, $r + r \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = n$, donc $\boxed{2r \leq n.}$
23. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H. Montrons que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ dans $\mathbb{C}^r$ tels que
    $$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) = 0 \quad (*).$$
    En appliquant u à cette égalité, il vient que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$ car $u^2 = 0$. Par linéarité de u, $0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r)$. Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ car la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. L'équation $(*)$ devient alors
    $$\mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) = 0.$$
    Et, de même, le vecteur $\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$. Finalement, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de E}}$ car cette famille est libre et de cardinal $2r = \dim(E)$.
24. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ la base de E obtenue dans la question précédente. Pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$, u envoie e_k sur $u(e_k)$. Et $u^2 = 0$, d'où $u(u(e_k)) = 0$.

    Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\mathrm{diag}(J_2, \ldots, J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$
25. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H. Comme dans la question 23, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre. Elle est de cardinal r et ses vecteurs appartiennent tous à $\mathrm{Ker}(u)$ car $u^2 = 0$. Or $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $n - r > r$ car $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$, en rajoutant $(n - r) - r = n - 2r$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1, \ldots, v_{n-2r})$.
    La décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$ montre que, en concaténant la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \ldots, u(e_r), v_1, \ldots, v_{n-2r})$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.

    En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, \ldots, v_{n-2r}) \text{ est une base } \mathcal{B} \text{ de E.}}$

26. Pour chaque $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u envoie e_k sur $u(e_k)$ et $u(u(e_k)) = 0$ car $u^2 = 0$. De plus les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-2r}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n-2r \rrbracket,\ u(v_k) = 0$.
On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{\mathrm{diag}(\mathrm{J}_2, \ldots, \mathrm{J}_2, (0)_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } \mathrm{J}_2 \text{ suivis de la matrice nulle } (0)_{n-2r} \text{ de } \mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C}).}$$

Partie E - Matrices toutes-puissantes

27. D'une part, la matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, d'où $\mathrm{N}^n = 0$. D'autre part, elle est toute-puissante, d'où il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{N} = \mathrm{B}^n$. Par suite, $0 = \mathrm{N}^n = \mathrm{B}^{(n^2)}$. D'où la matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. D'où $\mathrm{B}^n = 0$. Donc la matrice N est nulle.
28. Ou bien $\mathrm{V} = 0$, alors $\mathrm{V} = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$, avec $\mathrm{Q} = 0$. Ou bien $\mathrm{V}(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_k x^k$, alors $k > n$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{j=k}^{\deg \mathrm{V}} a_j \mathrm{X}^j = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$, où Q est le polynôme $\sum_{j=k}^{\deg \mathrm{V}} a_j \mathrm{X}^{j-n}$.
29. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Du développement limité $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$ avec $\alpha = \frac{1}{p}$, on déduit que $(1+x)^{1/p} = \mathrm{U}(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$, où

$$\boxed{\text{U est le polynôme } 1 + \tfrac{1}{p}\mathrm{X} + \tfrac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1)}{2!}\mathrm{X}^2 + \cdots + \tfrac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1)\cdots(\frac{1}{p}-n+1)}{n!}\mathrm{X}^n}$$

D'où $1 + x = (1+x)^{p\alpha} = \left[\mathrm{U}(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\right]^p = (\mathrm{U}(x))^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (\mathrm{U}(x))^{p-k} o(x^{kn}) = (\mathrm{U}(x))^p + o(x^n)$ car, pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\mathrm{U}(x))^{p-k} \underset{x \to 0}{\sim} 1$ et $\underset{x \to 0}{o}(x^{kn})$ est négligeable devant x^n.
30. Des deux questions précédentes, il résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $1 + \mathrm{X} - (\mathrm{U}(\mathrm{X}))^p$ est divisible par X^n.
31. De l'égalité des polynômes $1 + \mathrm{X}$ et $(\mathrm{U}(\mathrm{X}))^p + \mathrm{X}^n \mathrm{Q}(\mathrm{X})$, on tire l'égalité des matrices $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ et $(\mathrm{U}(\mathrm{N}))^p + \mathrm{N}^n \mathrm{Q}(\mathrm{N})$. Or $\mathrm{N}^n = 0$ car la matrice N est nilpotente. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme U tel que $\mathrm{I}_n + \mathrm{N} = (\mathrm{U}(\mathrm{N}))^p$. ce qui prouve que la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ est toute-puissante.
32. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul : $\lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N} = \lambda\left[\mathrm{I}_n + \frac{1}{\lambda}\mathrm{N}\right]$ en divisant par $\lambda \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'une part, $\lambda = \mu^p$ en notant μ une racine $p-$ième du complexe λ. D'autre part, la matrice $\frac{1}{\lambda}\mathrm{N}$ est nilpotente, ce qui rend la matrice $\mathrm{I}_n + \frac{1}{\lambda}\mathrm{N}$ toute-puissante d'après la question précédente. Il existe donc une matrice B telle que $\mathrm{I}_n + \frac{1}{\lambda}\mathrm{N} = \mathrm{B}^p$. Par suite $\lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N} = (\mu \mathrm{B})^p$. Ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\boxed{\text{la matrice } \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N} \text{ est toute-puissante}}$$

33. Soit A une matrice inversible. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ ses r valeurs propres distinctes deux à deux. Soient $m_1, \cdots, m_r$ leurs multiplicités respectives dans le polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{A} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, qui est scindé. Des sous-espaces caractéristiques, on tire que $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{N}_1, \cdots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{N}_r)$, chaque bloc N_r étant nilpotent.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$: d'après la question précédente, chaque bloc $\lambda_i \mathrm{I}_{m_i} + \mathrm{N}_i$ est une matrice toute-puissante car $\lambda_i \neq 0$ car la matrice A est inversible par hypothèse. Il s'écrit donc $\lambda_i \mathrm{I}_{m_i} + \mathrm{N}_i = \mathrm{B}_i^p$ et, par suite la matrice A est la puissance $p-$ième de la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_r)$.

Donc $\boxed{\text{toute matrice inversible de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est toute-puissante}}$