## Exercice 1 - Condition de diagonalisabilité ($\star\star\star$)

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f$ est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un supplémentaire stable par $f$.

Supposons dans un premier temps que $f$ est diagonalisable et considérons alors $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Comme $f$ est diagonalisable sur $E$ il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ formé uniquement de vecteurs propres de $f$. De plus considérons $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de $F$, où $m = \dim(F)$.

Comme la famille $\mathcal{F}$ est libre (car c'est une base de $F$) et que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ est génératrice de $E$ (car $\mathcal{B}$ en est une base) on peut affirmer, d'après le théorème de la base incomplète, qu'il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\mathcal{E} = \mathcal{F} \cup \{v_i / \ i \in I\}$ soit une base de $E$.

En posant alors $G = \text{Vect}(v_i, \ i \in I)$ on obtient alors un supplémentaire de $F$ stable par $f$ car possédant une base de vecteurs propres.

Réciproquement supposons que tout sous-espace vectoriel de $E$ admette une supplémentaire stable par $f$. On considère alors le sous-espace formé des espaces propres de $f$ à savoir :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda Id)$$

Si $F = E$ alors $f$ est diagonalisable, d'où le résultat. Sinon $F \subsetneq E$ en particulier on peut considérer un hyperplan $H \subset E$ contenant $F$. Dès lors cette hyperplan possède un supplémentaire stable par $f$, comme il s'agit d'une droite vectoriel on peut affirmer qu'elle est engendré par un vecteur propre de $f$ alors qu'ils sont tous dans $F$ ce qui est absurde. En particulier $F = E$ d'où le résultat.

---

## Exercice 2 - Espace de matrice diagonalisable ($\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n$.

1. On considère $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur non-nul, vérifier que l'on a l'égalité :

$$^t\overline{X}X = \|X\|_2^2$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et l'on obtient alors :

$$\begin{aligned} ^t\overline{X}X &= (\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique sont toutes imaginaires pures.

Soit $M \in A_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M$ *i.e* $\lambda \in \text{Sp}(M)$. On considère alors également $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Dès lors on a $MX = \lambda X$ par définition, puis en conjuguant et transposant cette relation on obtient :

$$ {}^t\overline{X}{}^t\overline{M} = \overline{\lambda}{}^t\overline{X} $$

Puis en multipliant à gauche par $X$ on trouve :

$$ {}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\,\|X\|_2^2 $$

Cependant $M \in A_n(\mathbb{R})$, et donc ${}^t\overline{M} = -M$, d'où ${}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X = -\overline{\lambda}\,\|X\|_2^2$. Mais on obtient aussi ${}^t\overline{X}{}^t\overline{M}X$ en multipliant à droite l'égalité $MX = \lambda X$ par ${}^t\overline{X}$, ce qui permet d'aboutir à la relation :

$$ \lambda\,\|X\|_2^2 = -\overline{\lambda}\,\|X\|_2^2 $$

Puis comme $X$ est non nul, on en déduit que $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ ce qui signifie que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

3. On considère alors $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

3.a. Montrer que $F$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.

Il suffit de montrer que leur intersection est réduite à 0, considérons alors $M \in F \cap A_n(\mathbb{R})$. Par hypothèses $M$ est donc diagonalisable, ce qui implique que son polynôme caractéristique $\chi_M$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, en particulier $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$.

Mais $M \in A_n(\mathbb{R})$ aussi, et d'après les questions précédentes, on peut affirmer que $\mathrm{Sp}(M) \subset i\mathbb{R}$. Finalement on en déduit que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. Comme $M$ est diagonalisable est elle donc semblable à la matrice nulle, donc $M$ est la matrice.

Ainsi on a démontrer que $F \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ ce qui permet de conclure que $F \oplus A_n(\mathbb{R})$.

3.b. En déduire la majoration suivante :

$$ \dim(F) \leq \frac{n\,(n+1)}{2} $$

On utilise la formule de Grassman à $F \oplus A_n(\mathbb{R})$ et l'on obtient :

$$ n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \geq \dim(F \oplus A_n(\mathbb{R})) = \dim(F) + \dim(A_n(\mathbb{R})) $$

Enfin on montre classiquement que $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$, il suffit par exemple de considérer $(E_{i,j} - E_{j,i})$, où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires, pour obtenir une base de $A_n(\mathbb{R})$, puis de dénombrer.

En combinant ces deux résultats on trouve :

$$ \dim(F) \leq n^2 - \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2} $$

Ce qu'il fallait démontrer.

---

## Exercice 3 - Commutant $(\star\star)$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

On peut par exemple commencer par calculer le polynôme caractéristique de $A$, comme il s'agit d'une matrice $2 \times 2$ on sait qu'il est de la forme :

$$ \chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)\,X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X+2)\,(X-3) $$

On en déduit alors que $\text{Sp}(A) = \{-2, 3\}$, ce qui permet de résoudre les systèmes $AX = -2X$ et $AX = 3X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ afin de déterminer les vecteurs propres.

Le premier fournit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & -2x \\ 4x - y & = & -2y \end{array} \right. \iff 4x + y = 0$$

On en conclut alors que $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, de même la résolution de $AX = 3X$ conduit à $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\text{Vect}(I_2, A)$.

La première méthode , calculatoire, consiste à trouver les matrices commutant avec $\text{diag}(3, -2)$, puis en changeant de base on trouve les matrices commutant avec $A$ et l'on conclut :

On raisonne par analyse/synthèse en posant $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on supposant que $ND = DN$, où $D = \text{diag}(3, -2)$, ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{array} \right. \iff b = 0 = c \iff N \text{ est diagonale}$$

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec $D$. Á présent on remarque que l'on a $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

En considérant $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commute avec $A$ on obtient alors :

$$AM = MA \longleftarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \iff P^{-1}MP \text{ est diagonale}$$

Autrement dit il existe $a, d \in \mathbb{R}^2$ tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ d'où $M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$. Réciproquement une telle matrice commute bien avec $A$ d'où le résultat. Finalement $\mathcal{C}(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} /\ (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Il s'agit d'un plan vectoriel, comme il est immédiat que $I_2$ et $A$ lui appartiennent et qu'ils forment une famille libre, on en déduit par argument de dimension que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

La seconde méthode fait appel à des arguments algébrique sur la dimension du commutant de $A$ :

Comme on a montré précédemment que $A$ possède pour valeur propre 3 et $-2$ qui sont chacune de multiplicités 1 on en déduit que la dimension du commutant $\mathcal{C}(A)$ vérifie :

$$\dim(\mathcal{C}(A)) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Enfin comme de façon immédiate $I_2$ et $A$ sont tout deux des éléments de $\mathcal{C}(A)$, et qu'ils forment une famille libre, on en déduit qu'il s'agit d'une base, d'où $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

---

## Exercice 4 - Endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(\star)$

Montrer que l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a $M$ associe $M + \text{tr}(M) \times I_n$ est diagonalisable.

Regardons pour la valeur propre 1, on cherche $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle tel que $M = M + \text{tr}(M) \times I_n$ d'où $\text{tr}(M) \times I_n = 0$ dès lors $\text{tr}(M) = 0$. On en déduit que $E_1 = \ker(\text{tr})$ or la trace est une forme linéaire, son

noyau est donc un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi $\dim E_1 = n^2 - 1$.
Enfin on remarque que $I_n + \operatorname{tr}(I_n) \times I_n = (n+1) \times I_n$ ainsi $n+1$ est une valeur propre, d'après ce qui précède sa dimension est au plus 1, donc $\dim E_{n+1} = 1$ et finalement l'application précédente est diagonalisable.

---

## Exercice 5 - Résolution d'un système de suite $(\star)$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}$ qui vérifient $a_0 = 0$ et $b_0 = -1$ ainsi que :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n - b_n \\ b_{n+1} &= 3a_n - 2b_n \end{cases}$$

Donner une expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on a alors de façon immédiate $X_n = A^n X_0$. Or le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(X) = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ qui est donc scindé à racine simples.

À partir de là on peut soit réduire et déterminer la puissance $n$-ième de $A$, mais pour obtenir cette dernière il suffit de disposer d'un polynôme annulateur. D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A$ est un polynôme annulateur de $A$, on effectue donc la division euclidienne de $X^n$ par $\chi_A$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$, on peut affirmer l'existence (et l'unicité) d'un couple $(Q_n, R_n) \in (\mathbb{R}[X])^2$ avec $\deg(R_n) < \deg(\chi_A)$ tel que :

$$X^n = Q_n(X)\,\chi_A(X) + R_n(X)$$

Comme $\deg(R_n) < \deg(\chi_A)$ on en déduit que $R_n(X) = u_n X + v_n$ où $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant alors l'égalité de division en 1 et $-1$ qui sont les racines de $\chi_A$ on obtient :

$$\begin{cases} 1^n &= Q_n(1)\,\chi_A(1) + R_n(1) \\ (-1)^n &= Q_n(-1)\,\chi_A(-1) + R_n(-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 &= u_n + v_n \\ (-1)^n &= u_n - v_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_n &= 1 + (-1)^n \\ v_n &= 1 - (-1)^n \end{cases}$$

Dès lors en évaluant cette fois l'égalité de la division en $A$ on trouve :

$$\begin{aligned} A^n &= Q_n(A)\,\chi_A(A) + R_n(A) \\ &= u_n A + v_n I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2u_n + v_n & -u_n \\ 3u_n & -2u_n + v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - (-1)^n & (-1)^{n+1} - 1 \\ 3 + 3(-1)^n & 3(-1)^n - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement de la relation $X_n = A^n X_0$ et des résultats précédents on déduit :

$$X_n = \begin{pmatrix} 3 - (-1)^n & (-1)^{n+1} - 1 \\ 3 + 3(-1)^n & 3(-1)^n - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-1)^n \\ 1 - 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

---

## Exercice 6 - Racines de l'unité $(\star)$

Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

La condition sur $M$ peut se reformuler par l'existence d'un entier $n$ tel que le polynôme $X^n - 1$ soit un polynôme annulateur de $M$. Comme on sait que les valeurs propres de $M$ sont des zéros de tout polynômes annulateur, notant $U_n \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité, on en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(M) \subset U_n$$

Maintenant $M$ est à coefficients réels, et en particulier son polynôme caractéristique est à coefficients réels. Ainsi les racines complexes de $\chi_M$ sont complexes conjuguées, mais ce sont aussi des racines de l'unité. Dès lors on peut affirmer l'existence de $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in U_n$ tel que :

$$\chi_m(X) = (X-\mu)\left(X-\overline{\mu}\right) = X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1$$

À vrai dire $M$ est à coefficients entiers, et donc $\chi_M \in \mathbb{Z}[X]$, autrement dit $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. En effectuant la liste des valeurs possible pour $\frac{2k\pi}{n}$ on trouve :

$$\frac{2k\pi}{n} \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}$$

Enfin $M$ possédant un polynôme annulateur à racines simples dans $\mathbb{C}$ elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et même semblable à la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2ik\pi}{n}} \end{pmatrix}$$

Avec les contraintes sur $\frac{2k\pi}{n}$ on peut alors affirmer que $D^{12} = I_2$ et finalement $M^{12} = I_2$ ce qu'il fallait démontrer.

---

## Exercice 7 - Diagonalisation de la transposée (⋆⋆)

Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a $M \mapsto^t M$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\varphi$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\varphi(M)$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda mj, i$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ et donc $\lambda = \pm 1$ on a alors :

— Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que $-1$ est une valeur propre de $\varphi$, les vecteurs propres appartenant $\mathrm{Vect}\left(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n\right)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$.Ainsi on a $\dim E_{-1} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Si $\lambda = 1$, on a plus de contraintes sur les termes diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléments non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant les éléments de $\mathrm{Vect}\left(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n\right)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$, on a donc $\dim E_1 = n + \frac{n(n-1)}{2}$

2. L'application $\varphi$ est-elle diagonalisable ?

D'après la question précédente $\dim E_1 + \dim E_{-1} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ d'où $\dim E_1 + \dim E_{-1} = n + n(n-1) = n^2$ ainsi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1}$ et donc $\varphi$ est diagonalisable.

---

## Exercice 8 - Matrice par bloc (⋆⋆)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que $B$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ est diagonalisable.

Considérons $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\chi_M(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ ainsi $M$ est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. De plus on trouve :

$$MX = X \iff \begin{cases} -x-y &= 0 \\ 2x+2y &= 0 \end{cases} \iff x = -y \qquad MX = 2X \iff \begin{cases} -2x-y &= 0 \\ 2x+y &= 0 \end{cases} \iff y = -2x$$

Ainsi $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, on a donc la diagonalisation $M = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons $Q = \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$, où on a noté $I = I_n$, on a alors :

$$Q \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Ainsi $Q$ est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$ Calculons alors :

$$\begin{aligned} Q\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}Q^{-1} &= \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 2A \\ -A & -4A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Ainsi $B$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$. Or une matrice diagonale par bloc est diagonalisable si, et seulement si, chacun des blocs est diagonalisable. On en conclut alors que $B$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ est diagonalisable.

---

## Exercice 9 - Polynôme caractéristique en une autre matrice (⋆⋆)

Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que $MN$ est inversible si, et seulement si, $M$ et $N$ sont inversibles.

On a :

$$\begin{aligned} MN \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff \det(MN) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \times \det(N) \\ &\iff \det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0 \\ &\iff M \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in GL_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Démontrer que

$$\chi_M(N) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \text{Sp}(M) \cap \text{Sp}(N) = \varnothing$$

On note $\lambda_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ les valeurs propres de $M$ répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. On a donc :

$$\chi_M(N) = \prod_{i=1}^{n}(N - \lambda_i I_n)$$

D'après la question précédente et une récurrence immédiate, $\chi_M(N)$ est inversible si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $N - \lambda_i I_n$ est inversible. C'est-à-dire si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!] \lambda_i \notin \mathrm{Sp}(N)$. Ceci revient à dire que $\mathrm{Sp}(M) \cap \mathrm{Sp}(N) = \varnothing$

---