Intégration

1 Intégration sur un segment - Généralités

Exercice 1. ♡ Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$. Monter que si $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$, alors f garde un signe constant sur $[a;b]$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note M (resp. m) le maximum (resp. minimum) de f sur $[0,1]$. Montrer que si $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, alors

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq -mM.$$

Exercice 3. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ avec $a < b$. On suppose que

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b f^3(x)\,dx = \int_a^b f^4(x)\,dx.$$

Que peut-on dire de f sur $[a;b]$?

Exercice 4. ♡* Soi $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Exercice 5. ♡* Le nombre π est irrationnel (preuve de Ivan Niven 1946) : on suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^2$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x).$$

1. Montrer que $(F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)' = f_n(x)\sin x$.
2. Montrer que pour tout n, $I_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx$ est un entier.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx = 0$
4. Conclure.

Exercice 6. **

1. Soit $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. On suppose que pour $r \in \mathbb{N}^*$, $e^r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Poser

$$I_n = b \times r^{2n+1}\int_0^1 f_n(x)e^{rx}\,dx.$$

   En déduire une contradiction.
2. En déduire que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, e^r et $\ln r$ sont des irrationnels.

Exercice 7. * Soit f continue sur $[a;b]$, telle que $\forall x \in [a;b]$, $f(x) = f(a+b-x)$.

1. Interpréter graphiquement l'hypothèse faite sur f.
2. Montrer que
$$\forall x \in [a;b], \quad \int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{1}{2}(a+b) \int_a^b f(x)\, dx.$$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Exercice 8. ♡♡* Soit f une fonction définie, continue, positive sur $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

2 Calculs de primitives

Exercice 9. *

1. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}$, $x > 0$
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t} dt$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x} dx$

Exercice 10. ♡**

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.
2. $J_a = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x}$ avec $\in \mathbb{R}$, $a > -1$.

3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 11. ♡* Déterminer la limite lorsque u tend vers 0^+ de $f(u) = \displaystyle\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x} dx$.

Exercice 12. ♡♡** On pose
$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \; f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Étudier sommaire f (intervalle de définition, continuité, dérivabilité...)
2. Calculer les limites de f en 0, 1 et $+\infty$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 13. ** On pose $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\, dt$.

1. Montrer que ψ est bijective
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^y \exp(t^2)\, dt = 1$. Dans toute la suite, on pose $y = \varphi(x)$; exprimer φ en fonction de ψ. On va étudier la fonction φ ainsi définie.
3. En déduire que φ est continue et dérivable et exprimer sa dérivée.
4. Déterminer les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Montrer que le graphe de φ admet un axe de symétrie et une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.
6. Esquisser le graphe de φ.

4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 14. ♡* Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. On pose

$$\Psi : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_+^*) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \left(\int_a^b f(t)\,dt\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right)$$

1. Montrer que Ψ est minorée sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ et atteint sa borne inférieure.
2. Montrer que Ψ n'est pas majorée.

Exercice 15. ** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\lambda \int_0^x f^2(t)\,dt \leq \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$$

Que peut-on dire sur f ?

Exercice 16. ♡♡** Soit $f,\, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 f(t)\, g^n(t)\,dt.$$

On pose $M = \sup\limits_{[0,1]} g$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée.
2. Montrer que la suite $\left(I_n^{1/n}\right)_{n\geq 1}$ converge et a pour limite M.
3. Calculer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ puis celle de I_n si $M \neq 1$.
4. Étudier la suite (I_n) dans le cas $g(t) = t^n$: $\lim I_n$ et équivalent de I_n.

5 Intégrales généralisées

Exercice 17. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)} dx$ **6.** $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$ **8.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

Exercice 18. ♡* Nature des intégrales

$$1/ \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}\,dt, \quad 2/ \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt, \quad 3/ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin \frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}$$

Exercice 19. ♡♡**

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\textbf{1.} \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx \qquad \textbf{2.} \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx,\ \alpha > 0$$

Exercice 20. * Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue décroissante, de limite nulle en $+\infty$. On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ est convergente. Quel est son signe ?
3. On suppose $f(x) \geq 1/x$ pour $x \geq x_0$. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 21. * Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue et décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $xf(x) \to 0$.

Exercice 22. ** Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ de classe C^1 telle qu'il existe un réel $a < 0$ satisfaisant $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$. Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

Exercice 23. ♡* Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est bornée. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$.

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x+1/n) - f(x)|dx \to_{n\to+\infty} 0$.

6 Convergence dominée

Exercice 25.

1. Soit la suite des réels $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x \,\mathrm{d}x$.
   (a) Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge.
   (b) Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1}. En déduire la limite de (u_n).
   (c) Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de convergence dominée.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26. ♡ Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 27. ♡** Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$
En introduisant $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$, montrer que
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Intégration

(Solutions)

Solution 1. Une preuve efficace est de considérer que $|f(x)| - f(x)$ et $|f(x)| + f(x)$ sont des fonctions positives et continues, donc leur intégrale est nulle ssi la fonction est nulle, ce qui donne le résultat.

Solution 2. Utiliser que $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - m)(M - f(t))\, dt \geq 0$.

Solution 3. La fonction $(f^2 - f)^2$ est postive, continue et d'intégrale nulle, donc c'est la fonction nulle.

Solution 4. Comme la fonction sin est positive sur $[0, \pi]$, la fonction f s'annule au moins une fois en $x_0 \in]0, \pi[$. De plus, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\beta > 0$

$$\varphi(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,(\cos\theta \cos x + \sin\theta \sin x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(x - \theta),$$

où θ est un réel tel que $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Pour $\theta = x_0 + \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $\varphi(x_0) = 0$ et φ s'annule et change de signe qu'une seule fois sur $[0, \pi]$.
De plus, $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\, f(x)\, dx = 0$. Si f ne s'annulait qu'une fois, $f \times \varphi$ est de signe constant sur $[0, \pi]$ et alors $f = 0$.

Solution 5.

1. On veut montrer que $F'' + F = f(x)$. Vu que $f^{2(n+1)} = 0$, c'est immédiat. Pour comprendre ce que l'on a fait, calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(x) \sin x$ en faisant une série d'ipp.
2. On utilise la question précédente : il faut montrer que $F(\pi)$ et $F(0)$ sont des entiers.
   On pose $f_n = g_n h_n$ avec $g_n = \dfrac{x^n}{n!}$ et $h_n = (a - bx)^n$.
   On a $g_n^{(i)}(x) = \dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}$ si $i \leq n$ et 0 sinon ; donc $g_n^{(i)}(0) = \delta_{i,n}$.
   De plus, $h_n^{(i)}(x) = (-b)^i \dfrac{n!}{(n-i)!}(a - bx)^{n-i}$. La formule de Leibnitz nous dit que

   $$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_n^{(i)}(x) h_n^{(k-i)}(x)$$

   On évalue en 0, pour $k \geq n$

   $$f_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} g^{(n)}(0) f_n^{(k-n)}(0) = \binom{k}{n} \times (-b)^{k-n} \frac{1}{(2n-k)!} a^{2n-k},$$

   et si $0 \leq k < n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$.
   Ceci montre que $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$ et donc $F(0) \in \mathbb{Z}$.
   De plus, on remarque que $f(\pi - x) = f(x)$, donc pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
   Donc, $I_n \in \mathbb{Z}$, mais il est clair que $I_n \geq 0$. On obtient finalement $I_n \in \mathbb{N}$.
3. Si $n > 0$, on encadre pour $x \in [0, \pi]$

   $$0 < f_n(x) \sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

   On en déduit que $\displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \sin x\, dx$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

4. Une suite d'entiers qui tend vers 0 est nulle à partir d'un certain rang car il existe $N \in \mathbb{N}$, etl que $|u_n| < \dfrac{1}{2}$. Mais c'est impossible car > 0 comme intégrale d'une fonction continue postive non nulle.

Solution 6.

1. On pose $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-\frac{1}{r})^k f_n^{(k)}(x)$ et
$$(F_{2n}(x) \times e^{rx})' = (rF_{2n}(x) + F'_{2n}(x))e^{rx} = f_n(x)e^{rx}.$$
On en déduit que $J_n = b \times r^{2n} \times [F_{2n}(x) \times e^{rx}]_0^1$ est un entier.
Par ailleurs
$$0 \leq J_n \leq b \times \frac{r^{2n+1}}{n!} = v_n$$
le terme de droite tend vers 0, car $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0$. Comme dans l'exercice précédent, J_n est alors nul à partir d'un certain rang, ce qui est absurde comme intégrale d'une fonction positive continue non nulle.
On en conclut que e^r n'est un rationnel.
2. Si $e^{p/q}$ est rationnel, alors $e^q = (e^{p/q})^q$ est un entier, ce qui est faux par la question précédente. Donc l'exponentiel d'un rationnel non nul est un irrationnel.
Et si $\ln \dfrac{p}{q}$ est un rationnel α, alors e^α serait un irrationnel par ce qui précède, mais $e^\alpha = \dfrac{p}{q}$, ce qui contredit le premier résultat de cette question.

Solution 7.

1. Le milieu des points $(x, f(x))$ et $(a+b-x, f(a+b-x))$ est le point $(\dfrac{a+b}{2}, 0)$, donc le graphe de f admet une symétrie de centre $(\dfrac{a+b}{2}, 0)$.
2. On fait le changement de variables affines $u = a + b - t$:
$$\int_a^b xf(x)\,dx = \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)\,(-du)$$
d'où le résultat.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ vérifie la condition du 1 pour $a = 0$ et $b = \pi$. On calcule
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \big[-\arctan(\cos x)\big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Solution 8. Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Puisque f est continue, il existe un point c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = M$. On suppose pour le moment que $c \in]a,b[$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x dans $[c-\eta, c+\eta]$, $f(x) \geq M - \varepsilon$. On a alors :
$$2\eta(M-\varepsilon)^n \leq \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)^n dx \leq \int_a^b f(x)^n dx \leq (b-a)M^n,$$
$$(2\eta)^{1/n}(M-\varepsilon) \leq \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n}M^n.$$
Maintenant, $(2\eta)^{1/n}$ tend vers 1, et $(b-a)^{1/n}$ aussi. Il est donc possible de trouver un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a :
$$M - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} \leq M + \varepsilon.$$
Ceci prouve le résultat demandé. La preuve est identique si c est une des bornes, mais on intègre par exemple entre a et $a + \eta$ simplement.

Solution 9.

1. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x>0$. La fonction $t\mapsto\sqrt{e^t-1}$ est une bijection de $[1,x]$ sur $[\sqrt{e-1},\sqrt{e^x-1}]$. Posant $u=\sqrt{e^t-1}$, on a
$$du=\frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}dt$$
d'où
$$F(x)=2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{du}{u^2+4}=\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$
2. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0,+\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :
$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \sin(\ln x) & u'(x) & = & \frac{1}{x}\cos(\ln x)\\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$
de sorte que
$$\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x).$$
On intègre une deuxième fois par parties en posant
$$\begin{array}{rclrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\\ v_1'(x) & = & 1 & v_1(x) & = & x \end{array}$$
de sorte que
$$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x).$$
En mettant tout cela ensemble, on trouve
$$\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)$$
soit
$$\int\sin(\ln x)=\frac{x}{2}\big(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\big).$$
3. On pose $u=\cos t$, de sorte que $dt=-\cos u du$. Il vient $\sin^3 dt=(\sin^2 t)\sin t dt=-(1-u^2)du$. De plus, pour $t=0$, $u=1$ et pour $t=\pi/4$, $u=\sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à
$$I=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{1-u^2}{1+u^2}du=-\int_{\sqrt{2}/2}^{1}du+\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{2}{u^2+1}du$$
soit
$$I=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan(\sqrt{2}/2).$$
4. On pose
$$w(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x}dx$$
et on remarque que $w(-x)=w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au changement de variables $t=\cos x$. Il vient $dt=-\sin x dx$ et donc
$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{-dt}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}.$$
On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que
$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}=\frac{1}{t(t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})}=\frac{-1}{2t}+\frac{1}{6(t-\sqrt{2})}+\frac{2}{3(2t+\sqrt{2})}.$$

On en déduit

$$I = \left[-\frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{2} - t) + \frac{1}{3}\ln(2t + \sqrt{2}) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

(il faut prendre garde que $t - \sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :

$$I = \frac{1}{6}\ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{3}\ln(2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\ln(2\sqrt{2}).$$

Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

Solution 10.

1. Les formules $1 + \cos 2u = 2\cos^2$ et $1 - \cos 2u = 2\sin^2 u$ suggèrent le changement de variables $t = \cos 2u$ continue, $dt = -2\sin 2u\, du$.

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{2 + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}} = -4\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2u\, du}{2 + \sqrt{2}\cos u + \sqrt{2}\sin u} - 4\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2u\, du}{2 + 2\cos(u - \frac{\pi}{4})}$$

Le changement de variables affine $v = u - \frac{\pi}{4}$ donne

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2v\, dv}{1 + \cos v} = \int_0^{\pi/4} \frac{2\cos^2 v - 1\, dv}{1 + \cos v} \int_0^{\pi/4} 2\cos v - 2 + \frac{1}{1 + \cos v}\, dv = \int_0^{\pi/4} 2\cos v - 2 + \frac{1}{2\cos^2 \frac{v}{2}}\, dv.$$

La primitive de la fonction à intégrer est $2\sin v - 2v + \tan\frac{v}{2}$ et finalement

$$I = 2\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + \tan\frac{\pi}{8}\right) = 4\sqrt{2} - 2 - \pi$$

2. On pense au chanegment de variables $u = \tan x$, mais il faut d'abord modifier l'intervalle d'intégration : l'intégrande est π périodique

$$I_a = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2 x}{1 + (1 + a)\tan^2 x} dx = \left[\frac{2}{\sqrt{1 + a}} \arctan(\sqrt{1 + a}\tan x) \right]_0^{+\infty}$$

Solution 11. On écrit

$$f(u) = \int_u^{2u} \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + O(x^3)\, dx = \ln 2u - \ln u + (u^2 - \frac{u}{4}) + O(u^4)$$

et la limite vaut $\ln 2$.

Solution 12.

1. On pose $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. Si $x \in I_1$, alors $[x^2, x] \subset I_1$. De même, si $x \in I_2$, alors $[x^2, x] \subset I_2$. on en déduit que l'intégrale existe car $g(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ est définie, continue sur I_i, $i \in \{1, 2\}$.
Si G est une primitive de g sur I_i, alors

$$f(x) = G(2x) - G(x) \Rightarrow f'(x) = 2G'(x) - G'(x) = \frac{x - 1}{\ln x}.$$

Ceci montre que f est trictement croissante sur I_1 et sur I_2.
De plus, comme f' admet admet pour limite 0 en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit que f admet une limite finie en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (théorème des accroissements finis). Mais un simple encadrement dans les deux cas nous en disent bien plus.

2. Étude en 0^+ : la fonction g étant décroissante, on a l'encadrement
$$\forall x \in]0,1[, \ \frac{x-x^2}{\ln x} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{\ln x^2}.$$
Par le théorème d'encadrement des limites, on déduit que $\lim\limits_{0^+} f = 0$.
En 1, l'encadrement est trop large, on va utiliser un dl généralisé de $g(t)$ en 1 :
$$f(t) = \frac{1}{\ln(1+(t-1))} = \frac{1}{t-1} \times \frac{1}{1-\frac{t-1}{2}+O((1-t)^2} = \frac{1}{t-1}+1+O((t-1))$$
On en déduit que
$$f(t) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt + (x^2-x) + O\left(\int_x^{x^2} t-1\,dt\right) = \ln\frac{x^2-1}{x-1} + (x^2-x) + O\left((x-1)^2\right)$$
la limite en 1 vaut donc $\ln 2$. On pourrait obtenir un dl de f en 1 en prolongeant les calculs, ce qui montre que f est aussi dérvable en 1.
3. En $+\infty$, On procède par intégration par parties :
$$f(x) = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt = \frac{x^2}{2\ln x} - \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x^2-x}{\ln^2 x}\right)$$
donc f est équivante à $\dfrac{x^2}{2\ln x}$ en $+\infty$. En refaisant des intégrations par parties, on obtenait un dl généralisé de f.

Solution 13.

1. La fonction ψ est la primitive de $\exp(t^2)$ qui s'annule en 0. Donc ψ est strictement croissante et comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \exp(x^2) = +\infty$, on en déduit que ψ définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Supposons que pour $x \in \mathbb{R}$, il existe y tel que $\displaystyle\int_x^y \exp(t^2) = 1 = \psi(y) - \psi(x)$. Et ψ étant bijective, c'est encore équivalent à $y = \psi^{-1}(1+\psi(x))$. Y est donc bien défini, est unique et $\varphi(x) = \psi^{-1}(1+\psi(x))$.
3. ψ est dérivable de dérivée qui ne s'annule pas, donc ψ^{-1} est encore dérivable. On en déduit que φ est continue et dérivable, comme composée de fonctions dérivables et
$$\varphi' = \exp(t^2)(\psi^{-1})'(1+\psi(t))$$
4. On a vu que $\varphi(x) = \psi^{-1}(1+\psi(x))$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, donc il en même pour ψ^{-1} et finalement pour φ.
5. Si $(x, \varphi(x))$ est un point du graphe de φ, alors $(-\varphi(x), -x)$ en est un autre car par changement de variable $u = -t$, on a $\displaystyle\int_{-\varphi(x)}^{-x} \exp(u^2)\,du = 1$. Donc la seconde bissectrice d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie du graphe.
Enfin, φ admet une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = x$ car si $x >> 0$, alors $1 = \displaystyle\int_x^{\varphi}(x)\exp(t^2)\,dt = (\varphi(x)-x)\exp(t_x^2)$ avec $t_x \in [x;\varphi(x)]$ ce qui montre que $\varphi(x) - x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par symétrie d'axe $y = -x$, on en déduit que le graphe admet la même asymptote en $-\infty$.

Solution 14.

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ montre que $\Psi(f) \geq (b-a)^2$ et $\Psi(1) = (b-a)^2$.

2. Montrer que si $f_n = e^{nx}$, alors $\Psi(f_n) \sim \dfrac{e^{n(b-a)}}{n^2}$.

Solution 15. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $0 \leq \alpha < \lambda$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\left(\int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt\right)^2 \leq \alpha \int_x^{x+\alpha} f^2(t)\,dt$$

d'où

$$\left(\int_0^{\alpha} f(t)\,dt\right)^2 \leq \alpha \int_0^{\alpha} f(t)^2\,dt \leq \lambda \int_0^{\alpha} f^2(t)\,dt$$

et l'inégalité est stricte si $\int_0^\alpha f(t)^2\,dt \neq 0$. Avec l'inégalité de l'énoncé, on obtient $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)^2\,dt = 0$. La fonction f^2 étant continue et positive, f est la fonction nulle sur $[0, \lambda[$ et par continuité sur $[0, \lambda]$.
On suppose que f est nulle sur $[0, n\lambda]$ et on recommence :

$$\left(\int_{n\lambda}^{n\lambda+\alpha} f(t)\,dt\right)^2 \leq \alpha \int_{n\lambda}^{\alpha} f(t)^2\,dt \leq \lambda \int_{n\lambda}^{n\lambda+\alpha} f^2(t)\,dt$$

qui donne f nulle sur $[n\lambda, (n+1)\lambda]$ et par récurrence, on a montré que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 16.

1. (a) Pour $n \geq 1$, L'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}g^{(n+1)/2}$ et $\sqrt{f}g^{(n-1)/2}$ donne

$$\left(\int_0^1 fg^n\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f\,g^{n+1)}\,dt\right) \times \left(\int_0^1 f\,g^{n-1}\,dt\right)$$

ce qui montre que $(I_n)^2 \leq I_{n+1}I_{n-1}$, et donc (u_n) décroissante.

(b) On vérifie que $I_{n+1} \leq MI_n$. La suite (u_n) est bornée et majorée, donc est convergente. Soit $l > 0$ sa limite.

2. Soit $M \geq \varepsilon > 0$ et $I_\varepsilon \neq \emptyset$ un segment de $[0, 1]$ tel que

$$\forall x \in I_\varepsilon,\ g(x) \in [M - \varepsilon, M].$$

On obtient l'encadrement suivant

$$(M-\varepsilon)^n \int_{I_\varepsilon} f(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,g^n(x)\,dx \leq M^n \int_0^1 f(t)\,dt.$$

en passant à la racine n-ième et en faisant tendre n vers $+\infty$, on encadre $I_n^{1/n}$ par deux suites convergeant respectivement vers $M - \varepsilon$ et M. Pour ε qui tend vers 0, on obtient ainsi que $(I_n^{1/n})$ converge aussi vers M.

3. On montre que les suites $\left((I_n)^{1/n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\geq 1}$ ont même limite : on a $\lim \ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) = \ln l$. On en déduit avec le théorème de Césaro et une somme téléscopique que $\lim\left(\dfrac{1}{n}\ln I_n\right) = \ln l$, d'où le résultat et $\lim u_n = M = l$.

4. On a $I_n = I_0 \times \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k$. Donc si $M > 1$, on en déduit que (I_n) tend vers $+\infty$ et vers 0 si $M < 1$.

5. Pour tout $\alpha \in [0, 1[$,

$$\left|n \int_0^{\alpha} t^n f(t)\,dt\right| \leq n\alpha^n \int_0^{\alpha} f(t)\,dt$$

qui tend vers 0.

Il faut donc étudier $n\displaystyle\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt$.

Pour $\varepsilon>0$ fixé, il existe α tel que $\forall x\in[\alpha,1]$, $|f(1)-f(t)|\leq\varepsilon$. On a

$$n\int_\alpha^1 t^n f(1)\,dt = n\left(\frac{f(1)}{n+1}-\frac{\alpha^n f(\alpha)}{n+1}\right)=f(1)+o(1)$$

Or

$$\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt - n\int_\alpha^1 t^n f(1)\,dt\right|\leq\int_\alpha^1 t^n|f(t)-f(1)|\,dt\leq\varepsilon$$

On en déduit que $\lim nI_n=f(1)$, et $I_n\sim\dfrac{f(1)}{n}$ $(f(1)\neq 0)$.

Solution 17. 1. La fonction $x\mapsto\ln x$ est continue sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut :

— remarquer qu'on connait une primitive de ln, a savoir $x\mapsto x\ln x-x$. On a donc

$$\int_X^1\ln x dx=[x\ln x-x]_X^1=-X\ln X+X-1$$

qui tend vers -1 si X tend vers 0.

— comparer : On sait que $\sqrt{x}\ln x\to 0$ quand $x\to 0$. Ceci signifie que $\ln x=o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\displaystyle\int_0^1\ln x dx$ converge.

2. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Mais il est facile de voir que

$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x^2}=\lim_{u\to+\infty}ue^{-u}=0.$$

Autrement dit, $e^{-x^2}=o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

3. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x\geq 0$, $|xe^{-x}\sin x|\leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3e^{-x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$, on en déduit que $xe^{-x}\sin(x)=o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.

4. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ peut-encore s'écrire $\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$. Elle est donc de la forme u'/u. On peut donc en calculer facilement une primitive :

$$\int_1^X\frac{dx}{x\ln x}=\big[\ln|\ln x|\big]_1^X=\ln|\ln X|-\ln|\ln 1|$$

qui tend vers $+\infty$ si $X\to+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ est divergente.

5. On cherche un équivalent simple de cette fonction en $+\infty$. Puisque $\arctan x\to\pi/2$ et $\ln(2+x^2)=\ln(x^2(1+2/x^2))=2\ln x+\ln(1+2/x^2)$, on obtient que

$$\frac{\arctan x}{x\ln(2+x^2)}\sim_{+\infty}\frac{\pi}{4x\ln x}.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ est divergente d'après la question précédente et qu'on a affaire à des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)}dx$ est divergente.

6. La fonction $t \mapsto \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, on a
$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$
Puisque $\displaystyle\int_0^1 dt$ converge (c'est une intégrale ordinaire !), on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \cos^2(1/t)dt$ est aussi convergente.
7. La difficulté de cette question, et de la suivante, est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a
$$e^{-\sqrt{\ln t}}t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t}+\alpha \ln t} \to +\infty.$$
Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$.
8. On compare, comme à la question précédente, à $\frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha > 0$. Il vient :
$$e^{-\sqrt{t}}t^\alpha = e^{-\sqrt{t}+\alpha \ln t} \to 0.$$
Ainsi, en choisissant $\alpha = 2$, on trouve $e^{-\sqrt{t}} = o(1/t^2)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

<u>**Solution 18.**</u>

1. la fonction est continue sur $]0,1]$ et est équivalente à $t^{-1/2}$ en 0.
2. Il faut étudier aux deux bornes : en 0
$$f\left(\frac{2}{\pi}+t\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+t\pi/2}\right)\right) =_0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}.(1-t\pi/2+o(t)\right)\right) \sim_0 \ln\left(\sin\left(t\pi^2/4+o(t)\right)\right) \sim_0 \ln t$$
l'intégrale est convergente. En $+\infty$, on peut calculer
$$\ln\left(1+\left[\cos\frac{1}{t}-1\right]\right) \sim_{+\infty} \cos\frac{1}{t}-1 \sim_{+\infty} -\frac{1}{2t^2}.$$
Ceci montre que l'intégrale sur $[1,+\infty[$ est convergente et donc elle converge sur $]\frac{2}{\pi};+\infty[$.
3. On étudie les deux bornes : en $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}\ln t}$ et l'intégrale est convergente sur $[1,+\infty[$ (intégrales de Bertrand).
En 0, on ne peut pas utiliser les équivalents car la fonction n'est pas de signe constant !. Mais
$$\left|\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\right| \leq \left|\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}\right| \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$$
et l'intégrale est absolument convergente sur $]0,1]$.
En conclusion, l'intégrale est convergente.

<u>**Solution 19.**</u> On va, en utilisant les développements limités, décomposer les fonctions en somme de fonctions dont l'étude est plus simple.

1. On écrit
$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin^2 x}{x}+O(x^{-3/2}).\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ converge, et il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} O(x^{-3/2})dx$.
L'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ est donc de même nature que $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$. Mais, en écrivant que

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

puis en utilisant (toujours par une intégration par parties) que $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}$ est convergente, et que $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ est divergente, on prouve que $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ est divergente. Il en est de même de l'intégrale de départ. Remarquons que

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\sim_{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

et que pourtant les deux intégrales ont des comportements opposés.

2. Posons $f(x)=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)$, puis effectuons un développement limité au voisinage de $+\infty$. On trouve

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right).$$

Posons $g(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right)$. Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ converge (effectuer une intégration par parties), les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ sont de même nature. Mais

$$g\sim_{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}$$

qui est une fonction positive. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}dx$. Utilisant la même méthode que pour la question précédente, on prouve que l'intégrale converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha\leq 1/2$. En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\alpha>1/2$.

Solution 20. 1. On va montrer que la série de terme général u_n vérifie le critère des séries alternées. En effet

- Si $n=2p$ est pair, alors $\sin(t)\geq 0$ sur $[2p\pi;2p\pi+\pi]$ et donc $u_{2p}\geq 0$. Si $n=2p+1$, alors $\sin(t)f(t)\leq 0$ sur $[(2p+1)\pi,(2p+1)\pi+\pi]$ et donc $u_{2p+1}\leq 0$.
- Comme la fonction $f(t)\sin(t)$ ne change pas de signe sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, on remarque d'abord que

$$|u_n|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin(t)|dt.$$

D'autre part, pour tout $t\in[n\pi,(n+1)\pi]$, puisque f est positive et décroissante, on a

$$0\leq f((n+1)\pi)|\sin(t)|\leq f(t)|\sin(t)|\leq f(n\pi)|\sin(t)|$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|dt\leq|u_n|\leq f(n\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|sin(t)|dt.$$

L'intégrale de $|sin(t)|$ sur une période étant égale à 2, on obtient finalement :

$$2f((n+1)\pi)\leq|u_n|\leq 2f(n\pi).$$

Cette inégalité montre simultanément que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0.

Ainsi, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général u_n est convergente.

2. Soit $X > 0$. Il existe un unique entier $n := n(X)$ tel que $X \in [n\pi, (n+1)\pi[$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On peut écrire
$$\int_0^X f(t)\sin(t)dt = S_{n-1} + \int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt.$$
Or,
$$\left|\int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt\right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|sin(t)|dt \leq |u_n|.$$
Ainsi, lorsque X tend vers $+\infty$, n tend également vers $+\infty$, S_{n-1} admet une limite finie et $\displaystyle\int_{n\pi}^X f(t)\sin(t)dt$ converge vers 0. C'est bien que l'intégrale est convergente. De plus,
$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
En particulier, puisque (u_n) vérifie le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est du signe de u_0, c'est-à-dire que
$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t dt \geq 0.$$

3. Si l'intégrale converge absolument, alors la série $\sum_n u_n$ converge elle aussi absolument. Mais en utilisant l'inégalité obtenue dans la première question, on obtient
$$|u_n| \geq 2f((n+1)\pi) \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$
si n est assez grand. Puisque la série de terme général $1/n$ est divergente, il en est de même de $\sum |u_n|$: l'intégrale n'est pas absolument convergente.

Solution 21. Comme f est décroissante, f admet pour limite en $+\infty$ soit $l \in \mathbb{R}$ soit $-\infty$, et comme l'intégrale est convergente, le théorème de la valeur moyenne dit qu'il existe $x_0 \in [x, x+1]$ tel que $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt = f(x_0)$ tend vers 0, donc par monotonie, f tend vers 0 en $+\infty$ et f est positive.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall y > x,\ 0 \leq \int_x^y f(t)\,dt \leq \varepsilon \Rightarrow\ 0 \leq (y-x)f(y) \leq \varepsilon$$
Pour x fixé, il existe $B \in \mathbb{R}$, $y > B$ implique $xf(y) \leq \varepsilon$, dont on déduit que
$$\forall y > B,\ yf(y) \leq 2\varepsilon$$
et donc $yf(y)$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.

Solution 22. D'après la définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{a}{2}.$$
Intégrons cette inégalité. Puisque f est positive, on trouve
$$\ln f(x) - \ln f(A) \leq \frac{a}{2}(x-A).$$
Passant à l'exponentielle, on en déduit, pour $x \geq A$,
$$0 \leq f(x) \leq f(A)e^{\frac{a}{2}(x-A)}.$$

Puisque $a/2 < 0$, la fonction $e^{\frac{a}{2}x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f. De plus, l'inégalité précédente prouve que f tend vers 0 en $+\infty$. D'autre part, de la limite de f'/f en $+\infty$, et puisque f est positive, on en déduit que $f'(x) \leq 0$ pour x assez grand, disons $x \geq B$. On en déduit, pour $x \geq B$,

$$\int_B^X |f'(t)| dt = -\int_B^X f'(t) dt = f(B) - f(X)$$

et ceci converge vers $f(B)$ quand X tend vers $+\infty$. f' est donc elle aussi intégrable.

Solution 23. Par hypothèse, $|f'|$ est intégrable sur $[a, b]$ car bornée. Donc f' est intégrable, ce qui veut dire que

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f'(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} f(x) - f(a)$$

en particulier, la limite en b existe, on prolonge alors par continuité.

Solution 24. "En ε" : Soit $\varepsilon > 0$. On se fixe X tel que $\displaystyle\int_X^{+\infty} |f| \leq \varepsilon$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-X+1} |f| \leq \varepsilon$.

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x + 1/n) - f(x)| dx \leq 4\varepsilon + \int_{-X}^{X} |f(x + 1/n) - f(x)| dx$. (on majore $|f(x + 1/n) - f(x)|$ par $|f(x + 1/n)| + |f(x)|$)

$\displaystyle\int_{-X}^{X} |f(x + 1/n) - f(x)| dx \to_{n \to +\infty} 0$ par CVD (domination par $2||f||_{\infty, [-X, X+1]}$).

Solution 6.

1. (a) $\forall x \in [0, \pi/4]$, $\tan x \in [0, 1]$. Donc pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $(\tan^n x)_n$ est une suite décroissante. Par croissance de l'intégrale, (I_n) est une suite décroissante minorée par 0, elle converge.

   (b) On fait le changement de variables $u = \tan x$ C^1 et bijectif : $d\,u = (1 + \tan^2 x)\, dx = (1 + u^2)\, dx$

   $$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1 + u^2} du = \int_0^1 \frac{u^{n-2}(1 + u^2)}{1 + u^2} - \frac{u^{n-2}}{1 + u^2}\, du = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

   Comme (I_n) converge, on note l sa limite. En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation précédente, on obtient $l = -l$ et $l = 0$.

   (c) Les fonctions $x \mapsto \tan^n x$ sont continues sur $[0, \pi/4]$ et majorées par 1 en valeur absolue. La fonction constante 1 est intégrable sur $[0, \pi/4]$. Le thérème de convergence dominée nous permet d'intervertir limite et intégrale, ce qui montre à nouveau que $\lim I_n = 0$.

2. On fait le changement de variables $u = x^n$ C^1 bijectif : $du = nx^{n-1}\, dx = n\, u^{(n-1)/n}\, dx$.

   $$\int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\, dx = \int_1^{+\infty} u^{1/n} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

   Et on a la domination sur $[1, +\infty[$:,

   $$\left| u^{1/n} \frac{e^{-u}}{u} \right| \leq e^{-u}.$$

   La fonction de droite est classiquement intégrable (on connaît une primitive). Le thérème de convergence dominée nous donne

   $$\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\, \mathrm{d}u.$$

3. comme f est continue sur $[0, 1]$ il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on a $|f(t^n)| \leq M$, ce qui nous donne une domination sur $[0, 1]$.
   Remarquons que $\forall t \in [0, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} f(t^n) = f(0)$ par continuité de f en 0.

   Le thérème de convergence dominée nous dit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n) = f(0)$.

Solution 6. 1. Posons $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$. Pour $x > 0$, $\arctan(nx) \to \pi/2$. Pour $x \in]0,1[$, $\exp(-x^n) \to 1$, pour $x = 1$, $\exp(-x^n) \to e^{-1}$ tandis que pour $x \geq 1$, $\exp(-x^n) \to 0$. De plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

avec $g(x) = \pi/2$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = \pi e^{-x}/2$ si $x > 1$. La fonction g étant intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Posons $g_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$. On écrit

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^n)\right).$$

Pour $x \in]0,1]$, on en déduit que $g_n(x) \to \dfrac{1}{1+x^2}$. Pour $x > 1$, on a

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n}n\ln(x) + \frac{1}{n}\ln(1+x^{-n})\right) \to x.$$

De plus, on a pour tout $x > 0$, $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, fonction qui est intégrable sur $]0,+\infty[$, et donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)x}.$$

Reste à calculer chaque intégrale. La première ne pose pas de problèmes, elle vaut $\pi/4$. Pour la seconde, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{dx}{(1+x^2)x} &= \int_1^X \frac{dx}{x} - \int_1^X \frac{x}{1+x^2}dx \\
&= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^X \\
&= \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^2) + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

On fait alors tendre X vers $+\infty$, et on remarque que

$$\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^2) = \ln(X) - \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^{-2}) \longrightarrow_{X\to+\infty} 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Solution 6. On commence par calculer $I_n(x)$: par un changement de variables, puis par des intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du \\
&= n^x\frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du \\
&= n^x\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}du \\
&= n^x\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.
\end{aligned}$$

On voit donc que pour résoudre l'exercice, il suffit de prouver que $I_n(x)$ converge, à x fixé, vers $\Gamma(x)$. Introduisons $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Alors :

— Pour chaque t, on a $f_n(t) \to e^{-t} t^{x-1}$;

— De plus, utilisant que $\ln(1+x) \leq x$ (car le logarithme est concave), on a

$$\ln(1 - t/n) \leq -\frac{t}{n}.$$

Ainsi

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$

pour $|t| \leq n$. On en déduit que

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1},$$

fonction qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne le résultat.