Feuille de T.D. n° 6

Probabilités

Exercice 1 (Indépendance). Soient A et B deux événements et les probabilités

$$x = P(A \cap B), \quad y = P(A \cap \bar{B}), \quad z = P(\bar{A} \cap B), \quad t = P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

1. Calculer $x + y + z + t$.
2. Calculer $P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)$ en fonction de x, y, z et t.
   En déduire que : A et B sont indépendants si, et seulement si,
   $$P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) \times P(\bar{A} \cap B).$$
3. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, \quad u \cdot (1-u) \leq \frac{1}{4}$.
   En déduire que : $|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (Équiprobabilité). Soit $n \geq 3$. Les boules d'une urne sont numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne.

1. Quel est l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement ?
3. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?

Exercice 3 (Formule des probabilités totales & suite arithmético-géométrique). On étudie le fonctionnement d'une machine à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, sachant que :

— si elle marche à l'instant n, elle tombe en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité a ;

— si elle est en panne à l'instant n, elle est encore en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité b.

On suppose que $|b-a| \neq 1$ et on note u_n la probabilité que la machine marche à l'instant n.

1. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n, de u_0, de b et de a.
3. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (Matrices stochastiques). On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $U = (1\ 1\ \cdots\ 1)^T \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que A est stochastique si, et seulement si, tous ses éléments de matrice sont positifs et $AU = U$. En déduire que 1 est une valeur propre de toute matrice stochastique et que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.
2. Montrer que le spectre (réel) d'une matrice stochastique est inclus dans $[-1, +1]$.
3. On suppose que tous les élements $a_{i,j}$ d'une matrice A stochastique sont strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(I_n - A)$ est égal à $\mathrm{Vect}(U)$.

Exercice 5 (Formule des probabilités totales & matrice stochastique). Un mobile se déplace sur un triangle ABC. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la position du mobile est A (avec la probabilité a_n), B (avec la probabilité b_n), ou C (avec la probabilité c_n). Entre deux instants n et $n+1$, le mobile change de position et se dirige de manière équiprobable vers une des deux autres positions. On suppose que, à l'instant 0, le mobile est situé à un sommet.

Exprimer matriciellement $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de (a_n, b_n, c_n). Étudier les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini. Dépendent-elles de la position initiale du mobile ?

Exercice 6 (Formule de Bayes)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $1-p \neq 0$ de dés honnêtes et une proportion $p \neq 0$ de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance n fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité u_n que le dé soit malhonnête ?
4. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 (Formule des probabilités composées – *Oral Mines Ponts PC 2016*)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.

1. On tire deux boules de l'urne simultanément.
   Soit S_1 l'événement : « On tire une boule blanche et une boule noire de l'urne ». Déterminer, en fonction de n, la probabilité de S_1.
2. On tire toutes les boules de l'urne (sans remise), deux par deux.
   Montrer que la probabilité d'obtenir, à chaque tirage, une boule blanche et une boule noire vaut $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 8 (Loi du zéro-un de Borel)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Soit F l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ tels que ω appartient à une infinité de E_n.

1. Montrer que $F = \displaystyle\bigcap_{n\geq 0} \left(\bigcup_{k\geq n} E_k \right)$.
2. L'ensemble F est-il un événement ?
3. Que peut-on dire de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des événements définis par $A_n = \displaystyle\bigcup_{k\geq n} E_k$?
4. On suppose que la série $\sum P(E_n)$ converge.
   Montrer que $\boxed{P(F) = 0}$.
5. On suppose, dans cette question, que $\left(\overline{E_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants et que la série $\sum P(E_n)$ diverge.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $N \geq n$,
   $$\ln\left(P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}\right)\right) \leq -\sum_{p=n}^{N} P(E_p).$$
   (b) En déduire la limite, quand $N \to \infty$, de $P\left(\displaystyle\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}\right)$.
   (c) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
   $$P\left(\bigcap_{p\geq n} \overline{E_p}\right) = 0.$$
   (d) Conclure que $\boxed{P(F) = 1}$.