Chapitre VII Séries de fonctions

Table des matières

VII.1 Trois manières de converger

VII.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 1

Soit une suite de fonctions f_n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est appelée *la somme partielle d'ordre* n. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et S une fonction. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$:

1. **converge simplement** sur I vers S si la série de réels $\sum f_n(x)$ converge pour chaque $x \in I$. Autrement dit, si la suite des fonctions S_n converge simplement sur I vers la fonction S :
$$\forall x \in I, \quad |S_n(x) - S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. **converge uniformément** sur I vers S si la suite des fonctions S_n converge uniformément sur I vers la fonction S :
$$\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 2 — *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S, alors :*

1. *la fonction S est définie sur I et, pour chaque $x \in I$,* $\quad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *;*
2. *la fonction $R_n = S - S_n$, appelée* le reste d'ordre n, *est définie sur I et*
$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \;;$$
3. *la suite de fonctions R_n converge simplement sur I vers 0 (la fonction nulle).*

Méthode 3 — *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers la fonction S*

$\iff$ *la suite de fonctions R_n converge uniformément sur I vers 0 ;*

$\implies$ *la suite de fonctions f_n converge uniformément sur I vers 0.*

Preuve — ($\Longleftarrow$) Par définition, la suite $R_n = S - S_n$ converge uniformément vers 0 si, et seulement si, la suite S_n converge uniformément vers S.

($\Longrightarrow$) $f_n = R_{n-1} - R_n$, d'où : pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq |R_{n-1}(x)| + |R_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |R_{n-1}(x)| + \sup_{x\in I} |R_n(x)|$, d'où $\sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |R_{n-1}(x)| + \sup_{x\in I} |R_n(x)|$. Or on vient de montrer que la suite de fonctions R_n converge uniformément vers 0. Donc la suite de fonctions f_n aussi. $\square$

Exercice 4 — *Soit $f_n(x) = x^n$. Montrer que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,+1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$;*
2. *elle ne converge pas uniformément sur $]-1,+1[$;*
3. *elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1,+1[$.*

VII.1.2 Convergence normale

Définition 5
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I s'il existe une suite de réels u_n tels que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq u_n \\ \text{et la série de réels } \sum u_n \text{ converge.} \end{cases}$$

Remarque 6 — *La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, la série de réels $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge.*

Proposition 7
convergence normale $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **convergence uniforme** $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **convergence simple**

Preuve — On sait déjà que : convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple.

Montrons que : convergence normale $\Longrightarrow$ convergence uniforme.

Soit $x \in I$: $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. (Toutes ces séries convergent car il y a convergence normale.) D'où $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq r_n$, où $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est le reste de la série convergente $\sum u_k$. D'où $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc (méthode 3) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Les réciproques sont fausses : d'après l'exercice 4, convergence uniforme $\not\Longleftarrow$ convergence simple. Et d'après l'exercice 8, convergence normale $\not\Longleftarrow$ convergence uniforme. $\square$

Exercice 8 — *Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

Montrer que :

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*
3. *elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

VII.2 Continuité

Théorème 9
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue en a. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue en a.

Preuve — Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ la somme partielle d'ordre n. La suite de fonctions S_n converge uniformément sur I vers S et, pour chaque n, la fonction S_n est continue en a, d'où (théorème V.6) la fonction S est continue en a. □

Corollaire 10
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue sur I.

Exercice 11 — *Soit la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$. Montrer qu'elle converge simplement sur $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?*

Théorème 12 (**de la double limite** ou **d'interversion somme-limite**)
Soient une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I et a une extrémité (éventuellement infinie) de cet intervalle. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la série de réels $\sum b_n$ converge et $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Preuve — Appliquer le théorème V.9 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. □

Exercice 13 (suite de l'exercice 8) — *Soit la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Montrer (de deux manières) que : $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

VII.3 Intégrer

L'objectif du théorème suivant est d'intégrer terme à terme une série de fonctions, autrement dit d'intervertir $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_a^b$.

Théorème 14 (**d'intégration terme à terme sur un segment**)
Soient un segment $[a,b]$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue sur le segment $[a,b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Preuve — Appliquer le théorème V.10 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. □

EXERCICE 15 — *Montrer que, pour tout* $x \in]-1,+1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Il existe un autre théorème d'intégration terme à terme (que nous admettrons), qui ne réclame ni que la convergence soit uniforme ni que l'intervalle soit un segment :

THÉORÈME 16 (**d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque**)
Soient un intervalle I et une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Si :

1. la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S *cpm* sur I ;
2. la série de réels $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge ;

alors S est intégrable sur I et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\, dt = \int_I S(t)\, dt$.

EXERCICE 17 — *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx$ *est convergente et qu'elle vaut* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

VII.4 DÉRIVER

L'objectif du théorème suivant est de dériver terme à terme une série de fonctions, autrement dit d'intervertir $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\frac{d}{dx}$.

THÉORÈME 18 (**de dérivation terme à terme**)
Soient un segment $[a,b]$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Si :

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction S ;
(ii) la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$;

alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

Preuve — Appliquer le théorème V.15 à la suite des sommes partielles S_n. □

COROLLAIRE 19
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. Si :

(i) pour chaque $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
(ii) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(x)$.