COLLE N° 08

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+n}{1+nx}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Vers quelle fonction f ?
2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Vers quelle fonction f ? Représenter graphiquement cette fonction f.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$:
$$\frac{x-1}{x^{2n}-1} \leq \frac{1}{2n}.$$
4. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $]1, +\infty[$?
5. Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

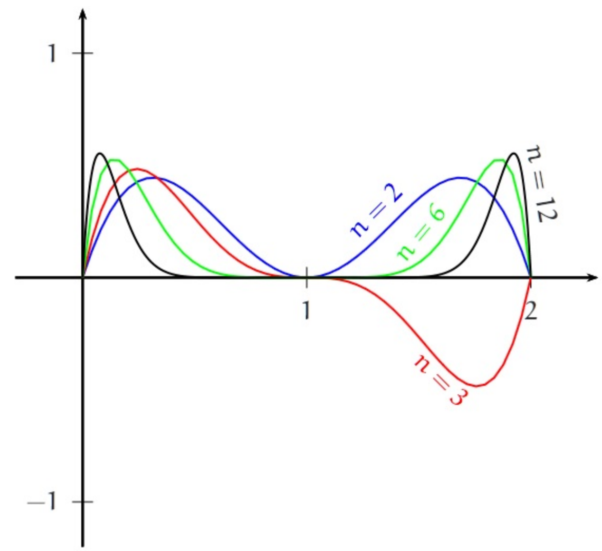

FIGURE 1 – LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : x \mapsto n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 2]$; vers quelle fonction f ?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b, 1+b]$ (où $b \in]0, 1[$) inclus dans $]0, 2[$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $]0, 2[$?
4. Etudier la limite, quand n tend vers ∞, de la suite $\int_0^2 f_n(x)\, dx$.