4) Soit $a>0$, Soit $x \in [a,+\infty[$.

$$f_n(x) - f(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2} = \frac{1}{\frac{1}{2^n x} + nx} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$$

qui est un majorant.

donc $0 \leq \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na}$ car le sup est le plus petit majorant. Or $\frac{1}{na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$

Soit $a > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$:

$f(x) = 1$

donc $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx}{1+nx} - 1\right| = \left|\dfrac{-1}{1+nx}\right| \leq \dfrac{1}{1+na}$

qui est un majorant

Or on a $0 \leq \sup \dfrac{1}{1+nx} \leq \dfrac{1}{1+na}$ car le sup est le plus petit majorant.

donc $\sup |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après le th des gendarmes.

0, $\dfrac{1}{1+na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc la convergence de (f_n) est uniforme sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Soit $a>0$,

$\forall x \in [a;+\infty[$, $|f_n(x)-f(x)| = |f_n(x)-1| = \dfrac{1}{1+nx} \leq \dfrac{1}{1+na}$ car $x \geq a > 0$.

qui est un majorant

Or, ~~ss~~ $0 \leq \sup\limits_{[a;+\infty[} |f_n - f| \leq \dfrac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. car le sup est le plus petit majorant

D'après le théorème des gendarmes, $\sup\limits_{[a;+\infty[} |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$= \dfrac{1}{1+na} \longrightarrow 0$

Par suite, <u>la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$, $a>0$.</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} \right| \leq \left| \frac{2^n x}{2^n n x^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{nx} \right| \leq \left| \frac{1}{na} \right|$$ qui est un majorant

D'où $0 \leq \sup_{[a,+\infty[} |f_n - f| \leq \frac{1}{na}$ car le sup est le plus petit majorant.

Or $\left| \frac{1}{na} \right| \xrightarrow[n \to 0]{} 0$ donc $\sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ~~car c'est le plus petit majorant~~ d'après le théo. des gendarmes. D'où la suite (f_n) CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$.

4. Soit $a > 0$,

qui est un majorant

$\forall x \in [a;+\infty[$, $\quad 0 \leqslant f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2} \leqslant \dfrac{1}{nx} \leqslant \dfrac{1}{na}$

or $\dfrac{1}{na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $0 \leqslant \sup |f_n - f| \leqslant \dfrac{1}{na}$ car le sup est le plus petit majorant.

donc d'après le théorème des gendarmes $\sup |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{\text{la suite } (f_n) \text{ CVU sur } [a,+\infty[}$