D.S. N$^{\text{O}}$ 3 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

23

EXERCICE

On étudie la fonction H définie par $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt.$

2 1. Montrer que, pour tout $x > -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt$ converge et déterminer sa valeur. IPP 1 ; cv [ ] 0,5 ; cv $\int$ 0,5

2 2. Montrer que, pour tout $x \leq -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\, dt$ diverge.

2,5 3. Montrer que $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ est défini si, et seulement si, $x > -1$. $\int_0^1$ cv $\iff$ $\int_0^{1/2}$ cv et $\int_{1/2}^{0}$ cv 0,5 ; $\int_0^{1/2}$ cv 1 ; $\int_{1/2}^1$ cv 1

1 4. Montrer que la fonction H est monotone (0,5) sur $]-1, +\infty[$. Préciser le signe (0,5) de $\mathrm{H}(x)$ pour tout $x > -1$.

1 5. Montrer que la fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 0^+ (0,5) et en 1^- (0,5).

2 6. En déduire qu'il existe un réel M tel que $\forall x > 0,\ \mathrm{H}(x) \leq \dfrac{\mathrm{M}}{x}$.

0,5 7. Montrer que $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.

2 8. Soit $x > -1$. Calculer $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. 0,5

Montrer que la série $\sum \frac{1}{(x+k)^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \mathrm{H}(x)$. cv 0,5 $\mathrm{H}(x+n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 1

2 9. Soit $x > -1$. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} \leq \mathrm{H}(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$. 0,5 $t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ continue et ↘ ; Bornes 1 ; $\leq$ passent à la limite 0,5

0,5 10. En déduire un équivalent de $\mathrm{H}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

0,5 11. Etudier la nature de la série numérique $\sum \mathrm{H}(n)$.

2 12. Montrer que la série numérique $\sum (-1)^n \mathrm{H}(n)$ est convergente.

3 13. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{H}(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, dt.$ somme géométrique 1 ; gendarmes 2

2 14. A l'aide d'un changement de variable, déterminer la valeur de cette intégrale en fonction de $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Problème – Endomorphismes nilpotents

Notations

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

On pose $J_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour chaque entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note diag(A, B), la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

8 **Partie A - Étude d'un exemple**

Pour chaque complexe β, on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta+1 \end{pmatrix}.$$

1 1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_β.

3 2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre β la matrice A_β est-elle diagonalisable ?

1 3. Montrer que la matrice A_0 est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

1,5 4. Montrer que la matrice A_0 est semblable à la matrice J_3.

1,5 5. On suppose que $\beta \neq 0$. La matrice A_β est-elle nilpotente ?

14 **Partie B - Matrices nilpotentes (anti)symétriques**

Soient u un endomorphisme nilpotent du $\mathbb{C}-$espace vectoriel E et p son indice.

2 6. Montrer que le spectre de u est égal à $\{0\}$. $Sp(u) \neq \emptyset$ 1 $Sp(u) \subset \{0\}$ 1

2 7. Montrer que la trace de u est nulle.

3 8. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M})$ 1 et en déduire qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et nilpotente si, 0,5 et seulement si, 1,5 elle est nulle.

1 9. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont antisymétriques et nilpotentes.

1 10. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4 11. Soient $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

1 12. Exhiber un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$ et de dimension égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.

12 **Partie C - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent**

Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

1 13. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

Dans la suite, on note a un tel vecteur et $\mathcal{B}_a$ la famille libre $\left(u^k(a)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$.

1 14. Montrer que l'indice p de u est inférieur ou égal à la dimension n de E.

1 15. Montrer que le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille $\mathcal{B}_a$ est stable par u.

1 16. Soit v l'endomorphisme induit par u sur C_a. Déterminer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_a$.

4 17. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}],\ \mathrm{Q} \mapsto \mathrm{Q}'$. Montrer qu'il existe exactement 3 $p+1$ 1 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ (que l'on déterminera) stables par l'endomorphisme f.

2 18. Construire une base de $\mathbb{C}_{p-1}[\mathrm{X}]$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_p.

2 19. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de C_a stables par u.

13 Partie D - Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice $p \leq 2$

1 20. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

3 21. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice A est nilpotente si, et seulement si, son déterminant et sa trace sont nuls.

On suppose dans la suite que la dimension n de E est supérieure ou égale à 3. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

1 22. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

4 23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

1 24. Exprimer la matrice de u dans cette base. (On utilisera les matrices J_α et la notation diag indiquées au début de l'énoncé.)

2 25. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

1 26. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

13 Partie E - Matrices toutes-puissantes

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *toute-puissante* si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^k$.

1 27. Montrer que, si une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente et toute-puissante, alors elle est nulle.

1 28. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 : $\mathrm{V}(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^n)$. Démontrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\mathrm{V} = \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$.

4 29. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (\mathrm{U}(x))^p + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

1 30. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + \mathrm{X} = \mathrm{U}^p + \mathrm{X}^n\,\mathrm{Q}$.

1 31. Soit une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Démontrer que la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ est toute-puissante.

1 32. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. Montrer que la matrice $\lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ est toute-puissante.

4 33. En déduire que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toute-puissante.