# Corrigé du T.D. n° 6

*Probabilités*

18 novembre 2024

---

**Exercice 1** (Indépendance)**.** Soient $A$ et $B$ deux événements et les probabilités

$$x = P(A \cap B), \quad y = P(A \cap \bar{B}), \quad z = P(\bar{A} \cap B), \quad t = P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

1. Calculer $x + y + z + t$.
2. Calculer $P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)$ en fonction de $x$, $y$, $z$ et $t$.
   En déduire que : $A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si,
   $$P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) \times P(\bar{A} \cap B).$$
3. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, \quad u \cdot (1 - u) \leq \frac{1}{4}$.
   En déduire que : $|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

---

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ et cette union est disjointe, d'où : $x + y = P(A)$. De même $z + t = P(\bar{A})$. Or $A \cup \bar{A} = \Omega$ et cette union est disjointe, d'où $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$, donc $x + y + z + t = 1$.
2. Les événements $A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
   Or $P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) = x - (x + y)(x + z) = x(x + y + z + t) - (x + y)(x + z) = xt - yz$.
   Donc $A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) \times P(\bar{A} \cap B)$.
3. Pour tout $u$ réel, $\frac{1}{4} - u \cdot (1 - u) = u^2 - u + \frac{1}{4} = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc : $\forall u \in \mathbb{R}, \quad u \cdot (1 - u) \leq \frac{1}{4}$.
   On veut montrer que : $-\frac{1}{4} \leq P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) \leq +\frac{1}{4}$.
   D'une part,
   $$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) &= x - (x + y)(x + z) \quad \text{d'après 1} \\ &= x - x^2 - (xz + yx + yz) \\ &\leq x - x^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \quad \text{d'après 3.} \end{aligned}$$
   D'autre part,
   $$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) &= yz - xt \quad \text{d'après 1} \\ &= y(x + y + z + t) - (y + x)(y + t) \\ &\leq y - y^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \quad \text{d'après 3.} \end{aligned}$$

**Exercice 2** (Équiprobabilité)**.** Soit $n \geq 3$. Les boules d'une urne sont numérotées de 1 à $n$. On tire toutes les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne.

1. Quel est l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement ?
3. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?

---

1. Le tirage se fait *sans remise*, un résultat est donc une liste *sans répétition* $(u_1, \cdots, u_n)$, où $u_i$ est le numéro de la $i-$ème boule tirée. Mieux : un résultat est une permutation de $[\![1, n]\!]$. L'univers $\Omega$ est donc le groupe $S_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$. Dans cet univers, il y a équiprobabilité, donc la probabilté d'un événement $A$ est
$$P(A) = \frac{\text{nbre de résultats favorables à } A}{\text{nombre de résultats possibles}} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$
De plus $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(S_n) = n!$.
2. Réaliser l'événement $A$ : « les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement », c'est :
   — choisir à quel moment on tire le n° 1 (il y a $n-2$ manières car il faut laisser de la place pour tirer ensuite le n° 2 et le n° 3) ;
   — tirer juste après le n° 2 puis le n° 3 (il y a une manière) ;
   — placer les $n-3$ autres boules aux $n-3$ autres places (il y a $(n-3)!$ manières).

   Donc $\mathrm{Card}(A) = (n-2) \times 1 \times (n-3)! = (n-2)!$ et $P(A) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$. (Remarque : dans le cas où $n = 3$, on trouve bien $\frac{1}{6}$.)
3. Réaliser l'événement $B$ : « les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre », c'est :
   — choisir les moments où seront tirés les numéros 1, 2 et 3 (il y a $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ manières) ;
   — y placer les numéros 1, 2 et 3 dans cet ordre (il y a une manière) ;
   — placer les $n-3$ autres boules aux $n-3$ autres places (il y a $(n-3)!$ manières).

   Donc $\mathrm{Card}(B) = \dfrac{n!(n-3)!}{3!(n-3)!} = \dfrac{n!}{6}$ et $P(B) = \dfrac{n!}{n!6} = \dfrac{1}{6}$.

**Exercice 3** (Formule des probabilités totales & suite arithmético-géométrique)**.** On étudie le fonctionnement d'une machine à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, sachant que :

— si elle marche à l'instant $n$, elle tombe en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité $a$ ;
— si elle est en panne à l'instant $n$, elle est encore en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité $b$.

On suppose que $|b-a| \neq 1$ et on note $u_n$ la probabilité que la machine marche à l'instant $n$.

1. Déterminer une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$, de $u_0$, de $b$ et de $a$.
3. Etudier la limite de la suite $(u_n)$.

---

1. Soit $M_n$ l'événement « La machine marche à l'instant $n$ ». Les événements $M_n$ et $\overline{M_n}$ ont une union disjointe et certaine, d'où :
$$P(M_{n+1}) = P(M_n) \cdot P_{M_n}(M_{n+1}) + P(\overline{M_n}) \cdot P_{\overline{M_n}}(M_{n+1}).$$
Or $P(M_{n+1}) = u_{n+1}$, $P(M_n) = u_n$, $P(\overline{M_n}) = 1 - u_n$ et $\begin{cases} P_{M_n}(M_{n+1}) = 1 - P_{M_n}(\overline{M_{n+1}}) = 1-a \\ P_{\overline{M_n}}(M_{n+1}) = 1 - P_{\overline{M_n}}(\overline{M_{n+1}}) = 1-b \end{cases}$. D'où $u_{n+1} = u_n(1-a) + (1-u_n)(1-b)$. Donc $u_{n+1} = (b-a)u_n + (1-b)$. $(*)$
2. La relation de récurrence $(*)$ est arithmético-géométrique, on la résout en cherchant un point fixe $\ell$ :
$$\ell = (b-a)\ell + (1-b) \iff \ell = \frac{1-b}{1-b+a}$$
car $a - b \neq -1$ par hypothèse. D'où :
$$(*) \iff u_{n+1} - \ell = (b-a)(u_n - \ell) \iff u_n - \ell = (b-a)^n(u_0 - \ell) \iff u_n = (b-a)^n(u_0 - \ell) + \ell.$$
3. $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$, d'où $0 - 1 \leq a - b \leq 1 - 0$, d'où $|a-b| \leq 1$. De plus $|b-a| \neq 1$ par hypothèse, donc $|b-a| < 1$ et $(b-a)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

**Exercice 4** (Matrices stochastiques)**.** On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $U = (1\ 1\ \cdots\ 1)^T \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est stochastique si, et seulement si, tous ses éléments de matrice sont positifs et $AU = U$. En déduire que 1 est une valeur propre de toute matrice stochastique et que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.
2. Montrer que le spectre (réel) d'une matrice stochastique est inclus dans $[-1, +1]$.
3. On suppose que tous les élements $a_{i,j}$ d'une matrice $A$ stochastique sont strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(I_n - A)$ est égal à $\mathrm{Vect}(U)$.

---

1. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ si, et seulement si, $AU = U$ car $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Soient $A$ et $B$ deux matrices stochastiques :
   - le réel 1 est une valeur propre de la matrice $A$ car le vecteur colonne $U$ n'est pas nul et $AU = 1U$ ;
   - d'une part, les éléments de matrice $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ du produit $C = AB$ sont positifs car tous les $a_{ik}$ et $b_{kj}$ le sont et, d'autre part, $(AB)U = A(BU) = AU = U$.
2. Si un réel $\lambda$ est une valeur propre de la matrice stochastique $A$, alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. D'où, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

   Notons $m = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Il existe un indice $i$ tel que $|x_i| = m$ et, pour cet indice $i$ : $\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| = |\lambda| \cdot m$.

   D'après l'inégalité triangulaire, $\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot m$ car chaque coefficient $a_{i,j}$ est positif par hypothèse.

   D'où $|\lambda| \cdot m \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot m$. Or le réel $m$ est strictement positif car le vecteur colonne $X$ n'est pas nul. D'où $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}$. Donc $|\lambda| \leq 1$.
3. De la première question, on déduit que $AU = U$, d'où $U \in \mathrm{Ker}(I_n - A)$ qui est un *sev*, donc $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(I_n - A)$. Réciproquement, en supposant de plus que tous les $a_{ij}$ sont strictement positifs : si $X$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(I_n - A)$, alors $AX = X$. D'où, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = x_i$. En particulier, soit $i$ un indice tel que $x_i$ est maximal : $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = x_i$. Or $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i \leq x_i$ et il y a égalité si, et seulement si, tous les $x_j$ sont égaux car tous les $a_{i,j}$ sont strictement positifs. Donc $X \in \mathrm{Vect}(U)$.

**Exercice 5** (Formule des probabilités totales & matrice stochastique)**.** Un mobile se déplace sur un triangle $ABC$. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la position du mobile est $A$ (avec la probabilité $a_n$), $B$ (avec la probabilité $b_n$), ou $C$ (avec la probabilité $c_n$). Entre deux instants $n$ et $n+1$, le mobile change de position et se dirige de manière équiprobable vers une des deux autres positions. On suppose que, à l'instant 0, le mobile est situé à un sommet.

Exprimer matriciellement $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de $(a_n, b_n, c_n)$. Étudier les limites de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ quand $n$ tend vers l'infini. Dépendent-elles de la position initiale du mobile ?

---

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les trois événements $A_n$ « le mobile est en $A$ à l'instant $n$ », $B_n$ « le mobile est en $B$ à l'instant $n$ » et $C_n$ « le mobile est en $C$ à l'instant $n$ » ont une union certaine et disjointe, d'où (formule des probabilités totales) : $P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n) \cdot P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n) \cdot P(A_{n+1}|C_n)$ et, de même pour $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$. D'où

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}}_{X_n}, \quad \text{donc, par récurrence,} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $M^n$, on essaie de diagonaliser la matrice $M$ :

$$M\varepsilon_1 = 1\varepsilon_1,\ M\varepsilon_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_2 \text{ et } M\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_3, \text{avec } \varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ et $\varepsilon_3$ sont propres et linéairement indépendants, donc la matrice $M$ est diagonalisable :

$$P^{-1}MP = D,\ \text{avec } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1/2 & 0\\0 & 0 & -1/2\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

D'où $X_n = M^n X_0 \iff X'_n = D^n X'_0$, en notant $X_n = PX'_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Or $D^n X'_0 = \begin{pmatrix}a'_0\\b'_0/(-2)^n\\c'_0/(-2)^n\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}a'_0\\0\\0\end{pmatrix}$.

D'où $X_n = PX'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}a'_0\\a'_0\\a'_0\end{pmatrix}$. D'où les suites $a_n$, $b_n$ et $c_n$ convergent vers une même limite $a'_0$. De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n = 1$ car les événements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ ont une union disjointe et certaine. D'où $\lim a_n + \lim b_n + \lim c_n = 1$, d'où $a'_0 = \frac{1}{3}$. Donc la limite des suites $a_n$, $b_n$ et $c_n$ vaut $\frac{1}{3}$, indépendamment de la position initiale du mobile.

**Exercice 6** (Formule de Bayes)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $1-p \neq 0$ de dés honnêtes et une proportion $p \neq 0$ de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance $n$ fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité $u_n$ que le dé soit malhonnête ?
4. Etudier la limite de la suite $(u_n)$.

---

1. Soient les événements $H$ : « le dé est honnête » et $S$ : « on obtient un six ». Les événements $H$ et $\overline{H}$ ont une union disjointe et certaine, d'où (formule des probabilités totales) :
$$P(S) = P(H)\cdot P(S|H) + P(\overline{H})\cdot P(S|\overline{H}) = (1-p)\times\frac{1}{6} + p\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}p + \frac{1}{6}.$$
2. D'après la formule de Bayes, $P(S)\cdot P(\bar{H}|S) = P(\bar{H})\cdot P(S|\bar{H})$. D'où $P(\bar{H}|S) = \dfrac{P(\bar{H})\cdot P(S|\bar{H})}{P(S)} = \dfrac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{3}p+\frac{1}{6}}$.
3. Soit l'événement $S_n$ : « on obtient $n$ six ».
$u_n = P(\bar{H}|S_n) = \dfrac{P(S_n|\bar{H})\cdot P(\bar{H})}{P(S_n)}$ car, d'après la formule de Bayes, $P(S_n|\bar{H})\cdot P(\bar{H}) = P(\bar{H}|S_n)\cdot P(S_n)$.
D'une part, $P(S_n|\bar{H})\cdot P(\bar{H}) = \frac{1}{2^n}\cdot p$. D'autre part, les événements $H$ et $\bar{H}$ ont une union disjointe et certaine, d'où (formule des probabilités totales) : $P(S_n) = P(H)\cdot P(S_n|H) + P(\bar{H})\cdot P(S_n|\bar{H}) = (1-p)\cdot\frac{1}{6^n} + p\cdot\frac{1}{2^n}$.
Donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{2^n}\cdot p}{(1-p)\cdot\frac{1}{6^n} + p\cdot\frac{1}{2^n}}$.
4. $u_n = \dfrac{\frac{1}{2^n}\cdot p}{\frac{1}{2^n}\cdot p}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{3^n p} - \frac{1}{3^n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

**Exercice 7** (Formule des probabilités composées – *Oral Mines Ponts PC 2016*)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires.

1. On tire deux boules de l'urne simultanément.
Soit $S_1$ l'événement : « On tire une boule blanche et une boule noire de l'urne ». Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité de $S_1$.
2. On tire toutes les boules de l'urne (sans remise), deux par deux.
Montrer que la probabilité d'obtenir, à chaque tirage, une boule blanche et une boule noire vaut $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $S_i$ l'événement « le $i$-ième tirage donne une boule blanche et une boule noire » et $A$ l'événement dont on cherche la probabilité. On a

$$A = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \quad (n \text{ succès}).$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}_{S_1}(S_2) \times \mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(S_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(S_n). \tag{1}$$

Chacun des $n$ facteurs est la probabilité $p_k$ de tirer une boule blanche et une boule noire quand on tire simultanément 2 boules dans une urne contenant $k$ boules blanches et $k$ boules noires (avec $k$ variant de $n$ à 1).

Lorsque l'urne contient $2k$ boules ( $k$ blanches et $k$ noires) cette probabilité est (par équiprobabilité) :

$$p_k = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{k^2}{\binom{2k}{2}} = \frac{k^2}{\frac{2k(2k-1)}{2}} = \frac{k}{2k-1}.$$

On peut retrouver cette probabilité $p_k$ en considérant qu'on tire 2 boules sans remise et alors $p_k = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$. En reprenant (1), il vient alors :

$$\mathbb{P}(A) = p_n \times p_{n-1} \times \cdots \times p_1 = \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

**Exercice 8** (Loi du zéro-un de Borel)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Soit $F$ l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ tels que $\omega$ appartient à une infinité de $E_n$.

1. Montrer que $F = \displaystyle\bigcap_{n\geq 0} \left( \bigcup_{k\geq n} E_k \right)$.
2. L'ensemble $F$ est-il un événement ?
3. Que peut-on dire de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des événements définis par $A_n = \displaystyle\bigcup_{k\geq n} E_k$ ?
4. On suppose que la série $\sum P(E_n)$ converge.

   Montrer que $\boxed{P(F) = 0}$.
5. On suppose, dans cette question, que $\left(\overline{E_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants et que la série $\sum P(E_n)$ diverge.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $N \geq n$,
   $$\ln \left( P \left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p} \right) \right) \leq - \sum_{p=n}^{N} P(E_p).$$
   (b) En déduire la limite, quand $N \to \infty$, de $P \left( \displaystyle\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p} \right)$.
   (c) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
   $$P \left( \bigcap_{p\geq n} \overline{E_p} \right) = 0.$$
   (d) Conclure que $\boxed{P(F) = 1}$.

1. Soit $\omega \in \Omega$ :

$$\begin{array}{lcl} \omega \in F & \Leftrightarrow & \omega \text{ appartient à une infinité de } E_k \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists\, k \geq n,\ \ \omega \in E_k \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \ \omega \in \bigcup_{k \geq n} E_k \\ & \Leftrightarrow & \omega \in \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} E_k \end{array}$$

2. $F$ est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements. Les tribus sont stables par unions et intersections, finies ou dénombrables. Par conséquent, $F \in \mathcal{A}$, autrement dit : $F$ est un événement.
3. $\bigcup_{k \geq n} E_k = (\bigcup_{k \geq n+1} E_k) \bigcup E_n$ d'où $\bigcup_{k \geq n+1} E_k \subset \bigcup_{k \geq n} E_k$
La suite $(A_n)$ est donc une suite décroissante d'événements.
4. $F = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ et la suite $(A_n)$ est décroissante, d'où (par continuité décroissante) : $P(F) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$.

   Et par $\sigma-$sous-additivité, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ : $P\left(\bigcup\limits_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(E_k)$ car la série $\sum P(E_k)$ converge par hypothèse.

   Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq P(A_n) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(E_k)$.

   Par hypothèse, la série $\sum P(E_n)$ est convergente. Par conséquent, la suite de ses restes converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) \right) = 0$$

   On conclut, par le théorème des gendarmes, que : $P(A_n)$ tend vers 0. Donc $P(F) = 0$.
5. (a) Les événements $\overline{E_p}$ étant indépendants, on sait que, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq N$ :

$$P\left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p \right) = \prod_{p=n}^{N} P(\overline{E}_p).$$

   On peut alors écrire :

$$\ln \left( P\left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p \right) \right) = \sum_{p=n}^{N} \ln \left( P(\overline{E}_p) \right) = \sum_{p=n}^{N} \ln \left(1 - P(E_p)\right) \leq - \sum_{p=n}^{N} P(E_p)$$

   car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout réel $x > -1$.

   (b) La série $\sum P(E_n)$ étant divergente, on sait qu'elle tend vers $+\infty$ (car tous les termes sont positifs). Par théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\ln \left( P\left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p \right) \right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{d'où} \quad P\left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p \right) = \exp\left( \ln \left( P\left( \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p \right) \right) \right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $N \geq n$, $\bigcap_{p \geq n} \overline{E_p} \subset \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}$. Par croissance de la probabilité, on en déduit que $0 \leq P\left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E_p}\right) \leq P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}\right)$. Les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$, donc $P\left(\cap_{p \geq n} \overline{E_p}\right) = 0$.

   (d) Une union, finie ou dénombrable, d'événements presque impossibles est encore un événement presque impossible ▷ **corollaire 14**. Or $\overline{F} = \bigcup_{n \geq 0} \left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E}_k\right)$ est une union dénombrable d'événements presque impossibles d'après la question précédente.
   D'où $P(\overline{F}) = 0$. Donc $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1$.