Kdo du 22/11/2024

Au recto, un exercice sur les suites récurrentes et les suites de fonctions.
Au verso, une preuve d'un théorème hors programme, le théorème de Dunford.

Exercice 1.

1. Soient un réel $x \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2}.$$
Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \ell - u_{n+1} \leq (\ell - u_n) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq M_n \qquad \text{où} \quad M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n.$$
6. Soit la suite des fonctions f_n définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par
$$f_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n^2(x)}{2}.$$
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$. Vers quelle fonction f ?
7. Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0,1]$.

(Un corrigé est en ligne sur le Cahier de Prépa.)

* **Théorème 2 (Décomposition de Dunford).** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tel que*

$$(i) \quad f = d + n \qquad (ii) \quad n \circ d = d \circ n.$$

Démonstration. On écrit $P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, et pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ les sous espaces caractéristiques de f.

♡ *Existence.* Comme $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i. On les définit comme suit :

$$\forall i, \forall x \in N_i, \quad d(x) = \lambda_i x \quad \text{et} \quad n(x) = f(x) - \lambda_i x.$$

Autrement dit, pour tout i on a $d_i = d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i}$ et $n_i = n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i}$. Les d_i et n_i sont des endomorphismes de N_i car N_i est stable par f donc par d et n.

Ainsi définie, d est diagonalisable. Pour tout i, on a $n_i^{\alpha_i} = 0$ (puisque par définition de N_i, pour tout $x \in N_i$, $(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$). Si $\alpha = \sup n_i$, n^α s'annule donc sur chaque N_i donc sur $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$, c'est-à-dire $n^\alpha = 0$.

Il reste à montrer que d et n commutent. Pour tout i, on a $d_i = \lambda_i \operatorname{Id}_{N_i}$ donc $n_i \circ d_i = d_i \circ n_i$, c'est-à-dire que d et n commutent sur chaque N_i, donc sur $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$.

♀ *Unicité.* Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions. On remarque d'abord que $f \circ d' = d' \circ f$, donc pour tout i, N_i est stable par d' (pour tout $x \in N_i$, $(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}[d'(x)] = d' \circ (f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i. Ceci étant vrai pour tout i, comme $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$, on en déduit que d et d' commutent. De plus d et d' sont diagonalisables, on peut donc les diagonaliser dans une même base, ce qui prouve que $d' - d$ est diagonalisable.

Comme $n = f - d$, $n' = f - d'$ et que $d \circ d' = d' \circ d$, n et n' commutent. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, on a donc

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} C_{p+q}^{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$$

(dans chaque terme de la somme, on a soit $i \geq p$, soit $j \geq q$). Donc $n - n' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avions montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. Autrement dit, $d = d'$ et donc $n = n'$. □

♡ La preuve de l'existence utilise les sous-espaces caractéristiques (plus précisément, l'exercice 39 du chapitre IV).

♀ L'unicité se prouve en utilisant le théorème de diagonalisation simultanée (Kdo du 8/11/2024).

* Cette preuve est tirée du livre "Les maths en tête - Algèbre" de X. GOURDON.