Corrigé du Kdo du 22/11/2024

1. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto t + \frac{x - t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{x}{2}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrons que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

Soit $t \in [0,1]$.

f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = -t + 1 \geqslant 0$

donc

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{x}{2}$	$\nearrow$	$\frac{x+1}{2}$

et $\begin{cases} \frac{x}{2} \geqslant 0 \\ \frac{x+1}{2} \leqslant 1 \end{cases}$

D'où $f([0,1]) = \left[\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right] \subset [0,1]$

Ainsi, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$

α

* $u_0 = 0 \in [0,1]$
* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \in [0,1]$.

Alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [0,1]$.

Non : $f \nearrow \not\Rightarrow (u_n) \nearrow$
Par contre :
$f \nearrow$ et $u_1 \geqslant u_0 \Rightarrow$
$\forall n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$

2. On a montré que f est croissante sur $[0,1]$, de plus $u_1 = \frac{x}{2} \geqslant u_0 = 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Et majorée d'après la question 1.

α

D'où d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel l.

De plus, l est un point fixe de f car f est continue, d'où : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(l)$

~~D'où, en posant $l = \lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,1]$~~,

$$f(l) = l \iff l = l + \frac{x - l^2}{2}$$
$$\iff x = l^2$$
$$\iff l = \sqrt{x}$$

$l \in [0,1]$ car $\forall n$, $u_n \in [0,1]$.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x}$

3. ~~D'après q1,~~ $\cancel{f([0,1]) = \left[\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right]}$

~~Donc~~ $u_1 = \frac{x}{2}$ et (u_n) est croissante d'après q2.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{2} \leq u_n \leq 1$

Or, $\forall t \in \left[\frac{x}{2}, 1\right], 0 \leq f'(t) = 1 - t \leq 1 - \frac{x}{2}$ qui est un majorant

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $[u_n, l]$ et dérivable sur $]u_n, l[$

$\subset \left[\frac{x}{2}, 1\right]$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$0 \leq f(l) - f(u_n) \leq (l - u_n)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq l - u_{n+1} \leq (l - u_n)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

4. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq l\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$

* pour $n = 0$: $l - u_0 = l$

donc $0 \leq l \leq l\left(1 - \frac{x}{2}\right)^0$

* pour $n = 1$: $\cancel{0 \leq l - u_1 \leq l - u_0 = l \text{ car } l \geq u_1 \geq 0}$

$l - u_1 = \sqrt{x} - \frac{x}{2} \geq 0$ car $\sqrt{x} \geq x$ car $x \in [0, 1]$

De plus, $l\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{2}$

et $x^{3/2} \leq x$ car $x \in [0, 1]$, ~~donc~~

Donc $0 \leq l - u_1 \leq l\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $0 \leq l - u_n \leq l\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$

Alors d'après la question 3,

$0 \leq l - u_{n+1} \leq (l - u_n)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

donc par hypothèse de récurrence:

$0 \leq l - u_{n+1} \leq l\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n+1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $\gamma : x \longmapsto \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n$

$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

γ est dérivable ~~st~~ sur $]0,1]$

$$\forall x \in]0,1], \quad \gamma'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n - \frac{n\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(-n\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Si $n \geq 1$: $-n\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \geq 0 \iff +nx + \frac{x}{2} - 1 \leq 0$

$\iff x \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{1+2n}$

Donc

x	0	$\frac{2}{1+2n}$	1
$\gamma'(x)$	$+$	0	$-$
$\gamma(x)$	$\nearrow$	M_n	$\searrow$

Et si $n = 0$: $\ell \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right)^0 = \sqrt{x}$

$M_0 = \sqrt{2} \geq \sqrt{x}$ car $x \in [0,1]$

D'où, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \leq M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n}$

6. Soit $x \in [0,1]$.

Alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme définie à la q1.

Donc d'après q2, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x}$

Donc la suite de fonctions (f_n) CVS vers $x \longmapsto \sqrt{x}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors d'après q.5,

$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq M_n$ qui est un majorant

Donc $0 \leq \sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - f_n(x)| \leq M_n$ car le sup est le plus petit majorant

Montrons que $M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:

$$M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \, e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \, e^{n\left(-\frac{1}{1+2n} + o\left(\frac{1}{1+2n}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \, e^{-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right)}$$

et $-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n}{1+2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{2}$

par continuité de exp, $e^{-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$

Donc $M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - f_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc (f_n) CVU vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Toni