# Feuille de T.D. n° 7

*Séries de fonctions*

**Exercice 1.** Soient l'intervalle $I = ]1, +\infty[$ et, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k \cdot x)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $I$.
2. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

   Montrer que la fonction $S$ est continue sur $I$.
3. Etudier, de deux manières, $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
4. Montrer que la fonction $S$ est dérivable sur $I$. La fonction $S$ est-elle (strictement) (dé)croissante sur $I$ ?

**Exercice 2.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$ : normalement ? uniformément ? simplement ?
2. Soit $x \neq 0$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt$$

   sont convergentes et les calculer.
3. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

4. Montrer que la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier $\sup\limits_{[0,+\infty[} |f_n|$. La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur $[0, +\infty[$ ?
3. Soit, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction $S$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
5. Soient un entier $n \geq 1$ et un réel $a \geq n$. Montrer que

$$S(a) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

6. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
7. Montrer que $S(x) = \underset{+\infty}{o}(x)$.
8. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 4** (tiré de CCP Maths 1 MP 2015)**.**

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : montrer que la fonction $f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   Calculer, pour chaque réel $x$ strictement positif, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

   Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} S(x)\, dx$ est convergente et la calculer.
3. En déduire, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$.

**Exercice 5.** Soient une suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum c_n$ converge absolument et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto c_n \frac{t^n}{n!}.$$

1. Soit un réel $a > 0$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et en déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, +a]$.
2. Montrer que la fonction $f\colon t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et la calculer.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et qu'elle est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ▷ **théorème 16**.

**Exercice 6** (La fonction zêta de Riemann)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $I = ]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\sup_{x\in I} |f_n(x)|$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normale sur l'intervalle $I$.
4. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $I$.
5. Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie et continue sur $I$.
6. Montrer que la fonction $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et que
$$\forall x \in I,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$
7. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ ▷ **exo 7 du TD 1**.

**Exercice 7** (théorème de la convergence dominée)**.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in ]0, 1[$, on note

$$f_n(t) = (-1)^n t^n f(t) \qquad \text{et} \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in ]0, 1[,\ |S_n(t)| \le |f(t)|$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt$.