

Chapitre VIII Produits scalaires

Table des matières

VIII.1	Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?	63
VIII.2	(In)égalités	64
VIII.3	Orthogonalité	66
VIII.4	Bases orthonormées	68
VIII.5	L'algorithme de Gram-Schmidt	69
VIII.6	Projection orthogonale (sur un <i>sev</i> de dimension finie)	70
VIII.7	Hyperplans	72

VIII.1 QU'EST-CE QU'UN PRODUIT SCALAIRE ?

DÉFINITION 1

Soient un \mathbb{R} -espace vectoriel E et une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$. On dit que φ est une forme :

[B] bilinéaire si $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z) \quad \text{et} \quad \varphi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(z, x) + \beta \varphi(z, y) ;$$

[S] symétrique si $\forall x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;

[D] définie si $\forall x \in E, [\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E]$;

[P] positive si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.

DÉFINITION 2

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Si $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors :

1. on dit que φ est un **produit scalaire**. Le produit scalaire $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ de deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ est aussi noté $\langle x|y \rangle$, $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$.
2. le carré scalaire $\varphi(x, x) = \langle x|x \rangle$ est positif. Sa racine carrée est notée

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$$

et est appelée la **norme** (associée à ce produit scalaire) du vecteur x .

On peut définir des produits scalaires sur différents espaces vectoriels de dimension finie : \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, \dots ou de dimension infinie : $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}([a, b])$, \dots . Un \mathbb{R} -*ev* muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien** ; un \mathbb{R} -*ev* de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace **euclidien**.

EXEMPLE 3 (Quelques produits scalaires, appelés canoniques) —

1. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est un espace euclidien quand on le munit du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \cdot Y \quad \text{pour tous vecteurs } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T \cdot X}.$$

2. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ est un espace euclidien quand on le munit du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(A^T \cdot B) \quad \text{pour toutes matrices } A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij}).$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T \cdot A)}.$$

3. L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ est un espace préhilbertien quand on le munit du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

La norme associée à ce produit scalaire est $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$.

EXERCICE 4 — Soit I un intervalle. On note $L_2(I)$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux et de carré intégrable sur I , c'est-à-dire : l'intégrale $\int_I f^2(t) dt$ (qui est peut-être impropre) converge. Montrer que :

1. le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable ;
2. l'ensemble $L_2(I)$ est un espace vectoriel ;
3. l'ensemble $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I est aussi un ev ;
4. $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t) dt$ est défini pour tous $f \in L_2(I)$ et $g \in L_2(I)$ et que c'est un produit scalaire sur $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ mais pas sur $L_2(I)$.

On peut définir sur un même espace vectoriel plusieurs produits scalaires. Et, à chaque produit scalaire, est alors associé sa norme.

EXERCICE 5 — Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt \quad \text{et} \quad \psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

sont deux produits scalaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire la norme associée à chaque produit scalaire.

2. Montrer que φ est encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, mais que ψ ne l'est plus.

VIII.2 (IN)ÉGALITÉS

THÉORÈME 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.

Preuve —

— Si $y = 0_E$, l'inégalité est vraie. Sinon, soit :

$$f(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \quad \text{car } \boxed{\text{B}} \text{ et } \boxed{\text{S}}.$$

Cette fonction f est un polynôme de degré 2 (car $\langle y, y \rangle$ est strictement positif) et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geq 0$ car le produit scalaire est positif $\boxed{\text{P}}$. Le discriminant $\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ du polynôme f est donc inférieur ou égal à zéro.

D'où $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Donc $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

— Si x et y sont colinéaires, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$. D'où $\langle x, y \rangle^2 = \lambda^2 \langle x, x \rangle^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Réciproquement : ou bien $y = 0_E$, les vecteurs x et y sont alors colinéaires. Ou bien $y \neq 0_E$, le discriminant Δ du polynôme f est alors nul. D'où

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) = 0.$$

D'où $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0$. Or le produit scalaire est défini $\boxed{\text{D}}$, d'où $x + \lambda y = 0_E$. Donc x et y sont colinéaires. □

EXEMPLE 7 —

1. Pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Preuve — L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . On l'applique aux deux vecteurs $(|x_1|, \dots, |x_n|) \in \mathbb{R}^n$ et $(|y_1|, \dots, |y_n|)$. □

2. Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) g(t)| dt \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Preuve — L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{C}([a, b])$. On l'applique aux deux fonctions $|f|$ et $|g|$ qui sont bien continues sur $[a, b]$. □

3. Plus généralement,

$$\forall f \in L_2(I), \forall g \in L_2(I), \left| \int_I f(t) g(t) dt \right| \leq \int_I |f(t) g(t)| dt \leq \left(\int_I f^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_I g^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Preuve — Le produit de deux fonctions de $L_2(I)$ est intégrable et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de $L_2(I)$. (Sauf que : ce produit scalaire n'en est pas un car il est positif mais pas défini ; mais la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'utilise pas le caractère défini.) On l'applique aux deux fonctions $|f|$ et $|g|$ qui sont bien dans $L_2(I)$. □

COROLLAIRE 8

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E . La norme

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

vérifie les trois propriétés :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0_E$;
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Preuve —

1. $\|x\| = 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$ car le produit scalaire est défini $\boxed{\text{D}}$.

2. $\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle$ car le produit scalaire est bilinéaire $\boxed{\text{B}}$.

D'où $\|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. Donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3.

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle \\
 &= \langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle + 2 \langle x | y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2.
 \end{aligned}$$

□

REMARQUE 9 — *En calculant*

$$(*) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle \quad \text{et} \quad (**) \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$$

puis la différence $(*) - (**)$ et la somme $(*) + (**)$, on obtient les quatre égalités

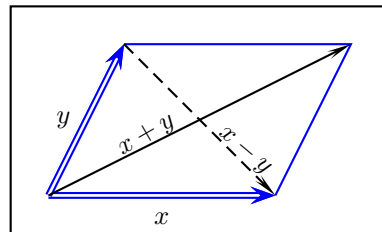
$$2\langle x | y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \tag{1}$$

$$2\langle x | y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \tag{2}$$

$$4\langle x | y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \tag{3}$$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \tag{4}$$

Les trois premières sont les **égalités de polarisation**, la quatrième est l'**égalité du parallélogramme** : la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.



VIII.3 ORTHOGONALITÉ

DÉFINITION 10

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soient $x \in E$ et $y \in E$ deux vecteurs. Soient A et B deux parties de E . On dit que :

1. x est orthogonal à y , et on note $x \perp y$, si

$$\langle x | y \rangle = 0 ;$$

2. x est orthogonal à B , et on note $x \perp B$, si x est orthogonal à tout vecteur de B :

$$\forall y \in B, x \perp y ;$$

3. A est orthogonal à B , et on note $A \perp B$, si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \perp y.$$

EXEMPLE 11 — Soient l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([-1, +1])$ et le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t) dt$.

1. Les fonctions $u \in E$ et $v \in E$ définies par

$$\forall x \in [-1, +1], \quad u(x) = 1 + x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = 2 - 5x^2$$

sont orthogonales ($u \perp v$) car $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{+1} (1 + t^2)(2 - 5t^2) dt = 0$.

2. Si f est une fonction paire et g est une fonction impaire, alors $f \perp g$ car

$$\int_{-1}^{+1} f(t)g(t) dt = 0 \quad \text{car la fonction } fg \text{ est impaire.}$$

On en déduit que le sev I des fonctions impaires de E est orthogonal au sev P des fonctions paires de E : $I \perp P$.

PROPOSITION 12

Si n vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont orthogonaux deux à deux ($\forall i \neq j, v_i \perp v_j$), alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$$

Preuve —

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n v_i \middle| \sum_{j=1}^n v_j \right\rangle &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle v_i | v_j \rangle && \text{car le produit scalaire est bilinéaire} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v_i \rangle && \text{car } i \neq j \implies \langle v_i | v_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 13 — 1. La réciproque est toujours vraie pour $n = 2$ vecteurs $u \in E$ et $v \in E$:

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (\text{théorème de Pythagore})$$

Preuve — $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$ est égal à $\|u\|^2 + \|v\|^2$ si, et seulement si, $\langle u, v \rangle = 0$. □

2. La réciproque n'est pas vraie pour plus de 2 vecteurs. Voici un contre-exemple avec 3 vecteurs : un vecteur $u \neq 0_E$ et deux vecteurs $v = w = -2u$.

PROPOSITION-DÉFINITION 14

On dit qu'une famille $(v_i)_{i \in I}$ finie ou infinie de vecteurs est orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies v_i \perp v_j$.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve — On rappelle qu'une famille infinie de vecteurs est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres. Soit donc une famille orthogonale (v_1, \dots, v_n) finie de vecteurs non nuls. On veut montrer que :

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_E \implies x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_E \implies \underbrace{\langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n | v_i \rangle}_{= x_i \langle v_i | v_i \rangle} = \underbrace{\langle 0_E | \varepsilon_i \rangle}_{= 0} \implies x_i = 0 \quad \text{car } v_i \neq 0_E.$$

□

DÉFINITION 15

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soit A une partie de E . L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A est appelé **l'orthogonal de A** et est noté A^\perp :

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \perp y\}.$$

En particulier $\emptyset^\perp = E$.

EXERCICE 16 — 1. Montrer que $\{0_E\}^\perp = E$ et que $E^\perp = \{0_E\}$.

2. Soit le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 . Soit le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$. Déterminer une base de $(\text{Vect } \vec{u})^\perp$.

3. Soit le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt$ sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit le polynôme $U = 1 + X^2$. Déterminer une base de $(\text{Vect } U)^\perp$.

PROPOSITION 17

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien E .

1. L'orthogonal d'une partie de E est un *sev* de E .
2. $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$.
4. si A est un *sev* de E , alors $A \cap A^\perp = \{0_E\}$, autrement dit les *sev* A et A^\perp sont en somme directe.

Preuve —

1. Soit A une partie de E . On veut montrer que A^\perp est stable par combinaisons linéaires et est non vide. D'une part, A^\perp contient le vecteur nul car 0_E est orthogonal à tout vecteur de E , donc en particulier à tout vecteur de A . D'autre part,

$$\forall x \in A^\perp, \forall y \in A^\perp, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda x + \mu y \in A^\perp$$

car $\forall z \in A, \langle z | \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z | x \rangle + \mu \langle z | y \rangle = 0$.

2. $A \perp B \iff \forall x \in A, x \perp B \iff \forall x \in A, x \in B^\perp \iff A \subset B^\perp$.

De même $B \perp A \iff B \subset A^\perp$. Or $B \perp A \iff A \perp B$.

3. On applique la propriété précédente aux deux parties A et $B = A^\perp$.

4. Le vecteur nul appartient à $A \cap A^\perp$ (car A et A^\perp sont des *sev* de E). Réciproquement : si un vecteur x appartient à $A \cap A^\perp$, alors $x \perp x$, d'où $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0_E$ car $\boxed{\text{D}}$.

□

VIII.4 BASES ORTHONORMÉES

DÉFINITION 18

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . On dit que :

1. un vecteur $x \in E$ est **normé** si sa norme est égale à 1 : $\|x\| = 1$.
2. une famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ finie ou infinie de vecteurs est une **famille orthonormée** si ses vecteurs sont normés et deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Si une famille orthonormée est une base de E , alors on dit que c'est une **base orthonormée** de E .

Travailler dans une base orthonormée simplifie les calculs. Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soient deux vecteurs $x = x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$ et $y = y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n$:

1. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \langle x | \varepsilon_i \rangle$;

2. $\langle x | y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i = X^T \cdot Y$, où $X = [x]_{\mathcal{C}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{C}}$;

3. $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T \cdot X.$

4. Si $A = (a_{ij})$ est la matrice d'un endomorphisme f dans la b.o.n. \mathcal{C} , alors $a_{ij} = \langle \varepsilon_i | f(\varepsilon_j) \rangle .$

Preuve —

1. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket :$

$$x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n = x \implies \underbrace{\langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n | \varepsilon_i \rangle}_{=x_i} = \langle x | \varepsilon_i \rangle \implies x_i = \langle x | \varepsilon_i \rangle.$$

2. $\langle x | y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i | \sum_{j=1}^n y_j \varepsilon_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$

3. C'est le cas particulier $x = y.$

4. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs ε_i et $f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \varepsilon_k.$

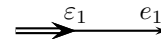
□

VIII.5 L'ALGORITHME DE GRAM-SCHMIDT

Existe-t-il toujours une base orthonormée? La réponse est : oui, si l'espace vectoriel est de dimension finie. Pour le démontrer, on utilise l'**algorithme de Gram-Schmidt** : il change une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ en une nouvelle base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ orthonormée.

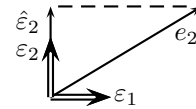
ÉTAPE N° 1 : $e_1 \longrightarrow \varepsilon_1$ vecteur normé

On veut que $\|\varepsilon_1\| = 1$: $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$



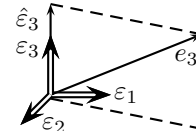
ÉTAPE N° 2 : $(\varepsilon_1, e_2) \longrightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ famille orthonormée

Soit $\hat{\varepsilon}_2 = e_2 - \lambda_1 \varepsilon_1$: $\hat{\varepsilon}_2 \perp \varepsilon_1 \iff \lambda_1 = \langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle .$
 On veut que $\|\varepsilon_2\| = 1$: $\varepsilon_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2}{\|\hat{\varepsilon}_2\|}.$



ÉTAPE N° 3 : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3) \longrightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ famille orthonormée

Soit $\hat{\varepsilon}_3 = e_3 - \lambda_1 \varepsilon_1 - \lambda_2 \varepsilon_2$: $\hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_1 \iff \lambda_1 = \langle e_3 | \varepsilon_1 \rangle .$
 $\hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_2 = \langle e_3 | \varepsilon_2 \rangle .$
 On veut que $\|\varepsilon_3\| = 1$: $\varepsilon_3 = \frac{\hat{\varepsilon}_3}{\|\hat{\varepsilon}_3\|}.$



⋮

ÉTAPE N° n : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, e_n) \longrightarrow (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ b.o.n. de E

Soit $\hat{\varepsilon}_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varepsilon_i$: $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket,$
 $\hat{\varepsilon}_n \perp \varepsilon_i \iff \lambda_i = \langle e_n | \varepsilon_i \rangle .$
 On veut que $\|\varepsilon_n\| = 1$: $\varepsilon_n = \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\|\hat{\varepsilon}_n\|}.$

REMARQUE 19 — 1. À chaque ÉTAPE N° $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille de k vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\langle e_k | \varepsilon_k \rangle$ est strictement positif.

2. De plus, la b.o.n. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt est l'unique base vérifiant la propriété 1.

EXERCICE 20 — Déterminer une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt.$$

VIII.6 PROJECTION ORTHOGONALE (SUR UN sev DE DIMENSION FINIE)

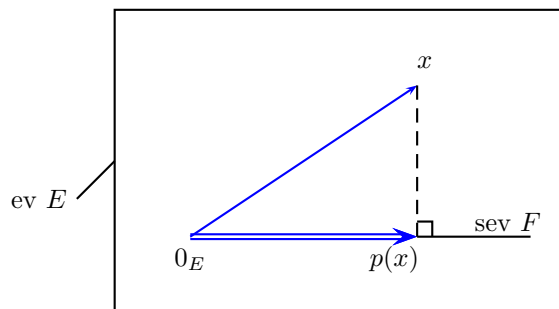
PROPOSITION-DÉFINITION 21

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Il existe une unique application linéaire $p : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \perp F.$$

On l'appelle la **projection orthogonale** sur F . Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de F , alors le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ s'écrit :

$$p(x) = \langle x | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \dots + \langle x | \varepsilon_n \rangle \varepsilon_n = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i.$$



Preuve — Unicité : Supposons qu'il existe une projection orthogonale p . Choisissons une b.o.n. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F . Le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ peut alors s'écrire $p(x) = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ car $p(x) \in F$. De plus, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x - p(x) | \varepsilon_i \rangle = 0$ car $x - p(x) \perp F$. D'où $\langle x | \varepsilon_i \rangle = \langle p(x) | \varepsilon_i \rangle$. Or $\langle p(x) | \varepsilon_i \rangle = \lambda_i$ car la base est orthonormée. Donc

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad (*).$$

On a démontré la formule (*) de la projection orthogonale et donc son unicité.

Existence : Soit $p : E \rightarrow E$ définie par la formule (*). L'application p est linéaire, $p(x) \in F$ pour tout $x \in E$ et $x - p(x) \perp F$ car $\langle x | \varepsilon_i \rangle = \langle p(x) | \varepsilon_i \rangle$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. □

EXERCICE 22 — 1. On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire canonique : écrire la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la projection orthogonale sur le plan F d'équation $x + y = 0$.

2. On travaille dans $\mathbb{R}[X]$ avec le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt$. Montrer que le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est $\frac{3}{5}X$.

COROLLAIRE 23

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. F et son orthogonal F^\perp sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$.
2. Par suite :
 - (a) la projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à F^\perp ;
 - (b) $F = (F^\perp)^\perp$.

Preuve — La projection orthogonale sur F existe car F est de dimension finie. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\perp F}$. Donc $E = F + F^\perp$. De plus $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Donc la somme est directe. Et p est le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .

Que le *sev* soit ou non de dimension finie, on a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Reste à montrer que $(F^\perp)^\perp \subset F$ si F est de dimension finie : soit un vecteur $x \in (F^\perp)^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, on peut décomposer ce vecteur : $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$. D'une part, $x \in (F^\perp)^\perp$ par hypothèse. D'autre part, $y \in F \subset (F^\perp)^\perp$. D'où $z = x - y \in (F^\perp)^\perp$. Or $z \in F^\perp$. D'où le vecteur z est nul. Donc $x = y + 0 \in F$. □

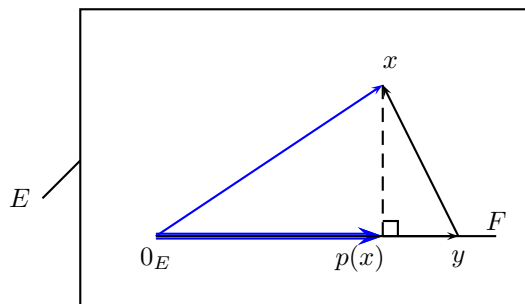
PROPOSITION 24 (Théorème des moindres carrés)

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit x un vecteur de E . Le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F est l'unique vecteur de F tel que

$$\forall y \in F, \quad \|x - p(x)\| \leq \|x - y\|.$$

Preuve — (Voir figure ci-dessous.) Soient $x \in E$ et $y \in F$:

$$x - p(x) \perp p(x) - y \text{ car } x - p(x) \perp F \text{ et } p(x) - y \in F. \text{ D'où (Pythagore) : } \|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2.$$



Donc $\|x - p(x)\| \leq \|x - y\|$. □

REMARQUE 25 — 1. D'après le théorème des moindres carrés, la fonction

$$F \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \|x - y\|$$

possède un minimum. Ce minimum est atteint une seule fois : en $p(x)$.

2. Le réel

$$\|x - p(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

est appelé la **distance entre le vecteur x et le sous-espace vectoriel F** et est noté

$$d(x, F).$$

3. D'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. D'où

$$\begin{cases} \|p(x)\| \leq \|x\| & (\text{inégalité de Bessel}) \\ d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p(x)\|^2} \end{cases}$$

EXERCICE 26 — Montrer que la fonction f définie pour tous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(a, b, c) = \int_{-1}^{+1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

possède un minimum : en quel(s) point(s) (a, b, c) ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

VIII.7 HYPERPLANS

PROPOSITION 27

Soit E un ev muni d'un produit scalaire.

1. L'orthogonal d'une droite vectorielle D est un hyperplan $H : D^\perp = H$.
2. Si E est de dimension finie, alors l'orthogonal d'un hyperplan H est une droite vectorielle $D : H^\perp = D$.

Preuve —

1. Une droite vectorielle $D = \text{Vect}(a)$ est dirigée par un vecteur non nul $a \in E$. Soit $x \in E$ un vecteur :

$$x \in D^\perp \iff x \perp a \iff \langle a, x \rangle = 0 \iff u(x) = 0,$$

où l'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire. Cette forme linéaire n'est pas nulle car $u(a) = \langle a, a \rangle \neq 0$. D'où D^\perp est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Donc D^\perp est un hyperplan.

2. Si E est de dimension finie n et si H est un hyperplan de E , alors $H \oplus H^\perp = E$ et $\dim H = n - 1$. D'où $\dim H^\perp = 1$. Donc H^\perp est une droite vectorielle de E . (Cette propriété n'est pas toujours vraie en dimension infinie, comme on le verra en TD.)

□

EXERCICE 28 — Soit E un espace euclidien.

1. Soit un vecteur a non nul orthogonal à un hyperplan H . Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad d(x, H) = \frac{|\langle a|x \rangle|}{\|a\|}.$$

2. Soit $D = \text{Vect}(a)$ la droite vectorielle dirigée par un vecteur a non nul. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad d(x, D) = \frac{\sqrt{\|a\|^2 \|x\|^2 - \langle a|x \rangle^2}}{\|a\|}.$$

THÉORÈME 29 (de représentation de Riesz)

Soit E un ev de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Pour toute forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a|x \rangle$.

Preuve — Si E est de dimension n , alors on peut construire une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt. Dans cette base orthonormée, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1\varepsilon_1 + \dots + x_n\varepsilon_n$, d'où

$$\varphi(x) = x_1\varphi(\varepsilon_1) + \dots + x_n\varphi(\varepsilon_n) = \langle a|x \rangle$$

en posant $a = \varphi(\varepsilon_1)\varepsilon_1 + \dots + \varphi(\varepsilon_n)\varepsilon_n$. Ce vecteur a convient donc. Et il est unique : par l'absurde, si deux vecteurs a et b conviennent, alors $\langle a|x \rangle = \langle b|x \rangle$ pour tout $x \in E$. D'où le vecteur $b - a$ est orthogonal à tous les vecteurs de E . Donc $b - a = 0_E$. (Cette propriété n'est pas toujours vraie en dimension infinie, comme on le verra en TD.) □