Corrigé du Kdo du 25/11/2024

Probabilités

Oral Mines Ponts PC 2019
Il s'agit d'un cas particulier de la loi du 0-1 de Borel
▷ **exo 8 du TD 6**

On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Soit A_n l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement « le premier 6 est obtenu au k-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
3. Soit K l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n. En déduire $P(K)$.
4. Exprimer K en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $P(K)$.
5. Soient G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

On note B_i l'événement « Au $i$ème lancer on a un 6 ».

1. Les lancers sont indépendants : $P(A_n) = P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}) = P(\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_n}) = (\frac{5}{6})^n$.
2. On obtient, en invoquant l'indépendance des lancers ou la loi géométrique :
$$P(F_k) = P(A_{k-1} \cap B_k) = P(A_{k-1})P(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$
3. On trouve $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, et les (A_n) formant une suite décroissante. Par le théorème de continuité décroissante
$$P(K) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$
4. On a aussi $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k}$. La réunion étant disjointe, $P(\cup_{k=1}^{+\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{5}{6})^{k-1} \frac{1}{6} = 1$. On retrouve la valeur
$$P(K) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 0.$$
5. (a) Soit G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois ». Son contraire est : « 6 apparaît un nombre fini de fois », ou encore « à partir d'un certain rang, on n'a plus de 6 », soit :
$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}.$$
Si on note $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{B_k}$, les (C_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante on a donc $P(\overline{G}) = P(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)$. Mais pour tout N, $P(C_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} \overline{B_k}) = \prod_{k=n}^{n} P(\overline{B_k})$ par indépendance des lancers, donc $P(C_n) \leqslant (\frac{5}{6})^{N-n+1}$, donc $P(C_n) = 0$. Alors $P(\overline{G}) = 0$ donc $P(G) = 1$.

   (b) Soit H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux », ou encore « à partir d'un certain rang, on n'a plus que des 6 », soit
$$H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k.$$
Si on pose $D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$, les (D_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante, on a donc $P(H) = P(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) = \lim_{n\to\infty} P(D_n)$. Mais pour tout N, $P(D_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} B_k) = \prod_{k=n}^{n} P(B_k)$ par indépendance des lancers, donc $P(D_n) \leqslant (\frac{1}{6})^{N-n+1}$, donc $P(D_n) = 0$. Finalement,
$$P(H) = 0.$$