Colle n° 09

Suites de fonctions & probabilités

Exercice 1.

1. (a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, dx$ est convergente.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\, dx$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\, dt$.
   (c) En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^n}\, dx$.
   (b) Soit, plus généralement, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n)\, dx$.

Exercice 2. Soit une suite de fonctions $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0,1[$ vers une fonction f. Montrer que :

1. si chaque fonction f_n est croissante, alors la limite f l'est aussi ;
2. même si chaque fonction f_n est bornée, la limite f ne l'est pas nécessairement ;
3. si chaque fonction f_n est bornée et si la convergence est uniforme sur $]0,1[$, alors la limite f est aussi bornée ;

Exercice 3. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On se donne K boîtes numérotées de 1 à K. La boîte numérotée k contient k boules blanches et $K-k$ boules noires. On choisit une boîte au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans la boîte choisie, on tire indéfiniment une boule au hasard avec remise.

On note :

— pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_n : « la n-ième boule tirée est blanche » ;
— pour chaque $k \in [\![1, K]\!]$, l'événement C_k : « La boîte choisie est la k-ième ».

1. Montrer que la probabilité $u_{K,n}$ de l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ vaut : $u_{K,n} = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \frac{k^n}{K^n}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{K\to\infty} u_{K,n}$.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_{K,n}$.
   (b) Cette limite est la probabilité d'un événement : lequel et pourquoi ?
   ▷ **théorème de la continuité décroissante**