Exercice 1 - Condition de diagonalisabilité (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

> Supposons dans un premier temps que f est diagonalisable et considérons alors F un sous-espace vectoriel de E. Comme f est diagonalisable sur E il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ formé uniquement de vecteurs propres de f. De plus considérons $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F, où $m = \dim(F)$.
>
> Comme la famille $\mathcal{F}$ est libre (car c'est une base de F) et que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ est génératrice de E (car $\mathcal{B}$ en est une base) on peut affirmer, d'après le théorème de la base incomplète, qu'il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\mathcal{E} = \mathcal{F} \cup \{v_i /\ i \in I\}$ soit une base de E.
>
> En posant alors $G = \text{Vect}(v_i,\ i \in I)$ on obtient alors un supplémentaire de F stable par f car possédant une base de vecteurs propres.
>
> Réciproquement supposons que tout sous-espace vectoriel de E admette une supplémentaire stable par f. On considère alors le sous-espace formé des espaces propres de f à savoir :
>
> $$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda Id)$$
>
> Si $F = E$ alors f est diagonalisable, d'où le résultat. Sinon $F \subsetneq E$ en particulier on peut considérer un hyperplan $H \subset E$ contenant F. Dès lors cette hyperplan possède un supplémentaire stable par f, comme il s'agit d'une droite vectoriel on peut affirmer qu'elle est engendré par un vecteur propre de f alors qu'ils sont tous dans F ce qui est absurde. En particulier $F = E$ d'où le résultat.

Exercice 2 - Commutant (⋆⋆)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

> On peut par exemple commencer par calculer le polynôme caractéristique de A, comme il s'agit d'une matrice 2×2 on sait qu'il est de la forme :
>
> $$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)\, X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X + 2)\,(X - 3)$$
>
> On en déduit alors que $\text{Sp}(A) = \{-2, 3\}$, ce qui permet de résoudre les systèmes $AX = -2X$ et $AX = 3X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ afin de déterminer les vecteurs propres.
>
> Le premier fournit :
>
> $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & -2x \\ 4x - y & = & -2y \end{array} \right. \Longleftrightarrow 4x + y = 0$$
>
> On en conclut alors que $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, de même la résolution de $AX = 3X$ conduit à $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

> La première méthode , calculatoire, consiste à trouver les matrices commutant avec $\text{diag}(3, -2)$, puis en changeant de base on trouve les matrices commutant avec A et l'on conclut :

On raisonne par analyse/synthèse en posant $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on supposant que $ND = DN$, où $D = \operatorname{diag}(3, -2)$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{cases} \Longleftrightarrow b = 0 = c \Longleftrightarrow N \text{ est diagonale}$$

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D. Á présent on remarque que l'on a $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

En considérant $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commute avec A on obtient alors :

$$AM = MA \longleftarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Longleftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Longleftrightarrow P^{-1}MP \text{ est diagonale}$$

Autrement dit il existe $a, d \in \mathbb{R}^2$ tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ d'où $M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$. Réciproquement une telle matrice commute bien avec A d'où le résultat. Finalement $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} / \ (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Il s'agit d'un plan vectoriel, comme il est immédiat que I_2 et A lui appartiennent et qu'ils forment une famille libre, on en déduit par argument de dimension que $C(A) = \operatorname{Vect}(I_2, A)$.

La seconde méthode fait appel à des arguments algébrique sur la dimension du commutant de A :

Comme on a montré précédemment que A possède pour valeur propre 3 et -2 qui sont chacune de multiplicités 1 on en déduit que la dimension du commutant $\mathcal{C}(A)$ vérifie :

$$\dim(\mathcal{C}(A)) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Enfin comme de façon immédiate I_2 et A sont tout deux des éléments de $\mathcal{C}(A)$, et qu'ils forment une famille libre, on en déduit qu'il s'agit d'une base, d'où $\mathcal{C}(A) = \operatorname{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 3 - Matrice par bloc $(\star\star)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Considérons $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\chi_M(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ ainsi M est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. De plus on trouve :

$$MX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} -x - y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x = -y$$

$$MX = 2X \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x - y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow y = -2x$$

Ainsi $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, on a donc la diagonalisation $M = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons $Q = \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$, où on a noté $I = I_n$, on a alors :

$$Q \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Ainsi Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix}$ Calculons alors :

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 2A \\ -A & -4A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I & I \\ -I & -2I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Ainsi B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$. Or une matrice diagonale par bloc est diagonalisable si, et seulement si, chacun des blocs est diagonalisable. On en conclut alors que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 4 - Approximation par des polynômes $(\star\star)$

On note $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On considère alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 t^n f(t)\, dt = 0$$

1. Justifier qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

Par définition f est continue sur un segment, dès lors on en déduit par le théorème d'approximation de Weierstrass l'existence d'une telle suite.

2. Démontrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt$$

Comme $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, pour intervertir limite et intégrale sur un segment on recherche la convergence uniforme de $(P_n \times f)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f^2. Or on a pour $t \in [0,1]$:

$$\left|P_n(t)\, f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)| \times |P_n(t) - f(t)| \leq \|f\|_\infty \times \|P_n - f\|_\infty$$

Or f est continue sur $[0,1]$ donc bornée sur ce segment, et de plus la convergence uniforme de (P_n) vers f implique que la limite du membre de droite tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$. Comme on a majorée par une quantité indépendante de t on en déduit que la convergence uniforme désirée et donc la possibilité d'intervertir et le résultat.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

On commence par calculer $\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt$, pour cela on considère que l'on peut écrire P_n sous la forme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$$

D'où par linéarité de l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} t^k \right) f(t)\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \int_0^1 t^k f(t)\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Dès lors par passage à la limite et en utilisant la question précédente on en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\, dt = 0$. Comme f est continue f^2 l'est aussi, de plus il s'agit d'une fonction positive d'intégrale nulle, on peut alors affirmer que $f^2 = 0$ puis que $f = 0$.

Exercice 5 - Convergence sur un compact $(\star)$

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

— Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$.

— Sinon par croissance comparé $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

On en déduit que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. On note ensuite $g = f - f_n$, étudier les variations de g.

On remarque que g est une fonction dérivable comme différence de fonctions dérivables et de plus on a :

$$g'(x) = -nx^{n-1}\Big(n\ln(x) + 1\Big)$$

On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Grâce à la question précédente on en déduit que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \left| g\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) \right| = e^{-1} \neq 0$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

La suite $\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ai $e^{-\frac{1}{n}} \geq a$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, la fonction g est croissante sur $[0,a]$. Puisqu'elle s'annule en 0, on en déduit que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \geq n_0$, on a :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)| = na^n \ln(a)$$

Le membre de droite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ on en déduit la convergence uniforme de (f_n) sur l'intervalle $[0,a]$.

Exercice 6 - Avec un paramètre (⋆⋆)

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

On remarque que l'on a $f_n(1) = 0$ et de plus pour $x \in [0,1[$, par croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on sait que $f_n(x)$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Pour étudier la convergence uniforme on dérive la fonctin f_n on trouve :

$$f_n'(x) = n^{a+1} x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}(n(1-x) - x)$$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\|f_n(x)\| &= \left|f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \\
&= n^a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n
\end{aligned}$$

En passant par l'exponentielle et le logarithme on trouve alors que :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

On en déduit que $\|f_n(x)\| \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1} n^{a-1}$. Dès lors, (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $a < 1$.

Exercice 7 - Convergence $\mathcal{C}^1$? (⋆⋆)

On considère la suite de fonction (f_n) définies par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Pour $x \in [-1,1]$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi la suite de fonction (f_n) converge vers la fonction valeur absolue.

2. Justifier que les f_n sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. Qu'en est-il de f ? Que peut-on en déduire ?

Pour $n \in \mathbb{N},\ x^2+\frac{1}{n} \neq 0$ et de plus la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on en déduit que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

En revanche $f = |.|$ n'est pas dérivable en 0, en particulier elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

On ne peut rien en déduire sur la suite de fonction (f_n)...

3. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n). Conclusion ?

On cherche à étudier la borne supérieure de la quantité :

$$|f_n(x) - |x|| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right|$$

Pour cela on remarque que la fonction $g_n : x \mapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|$ est dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$, et que de plus elle est paire. On étudie donc g_n sur $]0,1]$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} - 1 \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

On trouve alors le tableau de variation suivant :

x	0		1
$g_n'(x)$	‖	$-$	
g_n	‖ $\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\searrow$	

Par parité on en déduit alors que g_n admet un maximum en 0 et donc $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - |x|| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où la convergence uniforme sur $[-1,1]$

Pour affirmer que la limite f de la suite (f_n) soit de classe $\mathcal{C}^1$ il manque encore comme hypothèse que (f_n') converge simplement vers f'. D'après la question précédente on peut donc affirmer que cette convergence simple n'as pas lieu.