Corrigé de la colle n$^{\text{o}}$ 08

Suites de fonctions

25 novembre 2024

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n \ : \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+n}{1+nx}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Vers quelle fonction f ?
2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

---

1. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \operatorname{Arctan}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
   Si $x > 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$.
   Donc, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$ et cette fonction f est continue.
2. La fonction $g_n = f - f_n$ est dérivable et, pour tout $x \geq 0$:
   $$g_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+nx}{x+n}\right) - \operatorname{Arctan}(x) \quad \text{et} \quad g_n'(x) = / \cdots / = \frac{-2(1+2nx+x^2)}{\left[(x+n)^2 + (1+nx)^2\right](1+x^2)} \leq 0,$$
   d'où le tableau des variations :

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	
$g_n(x)$	$\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$	$\searrow$	$-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$

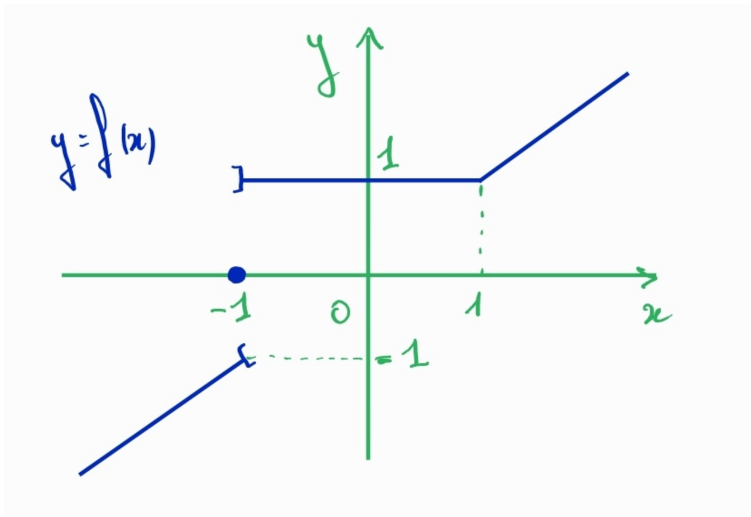
   D'où $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |g_n(x)| = \max\left(\left|\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}\right|, \left|-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}\right|\right) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Vers quelle fonction f ? Représenter graphiquement cette fonction f.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$:

$$\frac{x-1}{x^{2n}-1} \leq \frac{1}{2n}.$$



4. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $]1, +\infty[$?
5. Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

---

1. Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction
$$f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x \text{ si } x < -1,\ 0 \text{ si } x = -1,\ 1 \text{ si } \ -1 < x \leq 1,\ x \text{ si } x > 1.$$
2. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue en -1.
3. Pour tout $x \in]1, +\infty[$,
$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{1+x^{2n}} \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$
4. La question précédente montre que $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$. Or le *sup* est le plus petit majorant. D'où $0 \leq \sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n}$. D'après le théorème des gendarmes, $\sup\limits_{]1,+\infty[} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $]1, +\infty[$.
5. Pour tout $x \in [0, 1]$,
$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}$$
car $\dfrac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\frac{1}{x^{2n}} + \frac{x}{x^{2n}} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}}} & \text{sinon} \end{cases}$. Or $\dfrac{1}{2n}$ ne dépend pas de x. D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n}$ car le *sup* est le plus petit des majorants. De plus, $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.
Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 2]$; vers quelle fonction f ?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[1 - b, 1 + b]$ (où $b \in]0, 1[$) inclus dans $]0, 2[$.

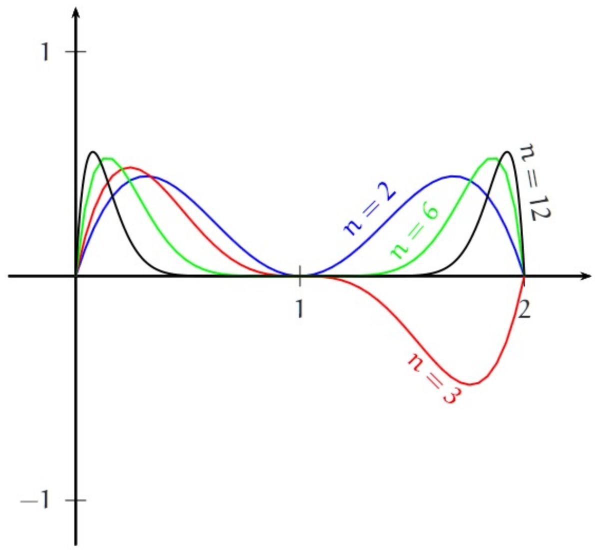


Figure 1 – La suite des fonctions $f_n : x \mapsto n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

3. La convergence est-elle uniforme sur $]0,2[$?
4. Etudier la limite, quand n tend vers ∞, de la suite $\int_0^2 f_n(x)\,dx$.

---

1. Si $x=0$ ou $x=2$, alors $f_n(x)=0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x\in]0,2[$, alors $|f_n(x)| \leq n|1-x|^n = \exp(\ln(n)+n\ln|1-x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0<|1-x|<1$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0,2]$ vers la fonction nulle $f : [0,2]\to\mathbb{R},\ x\mapsto 0$.
2. Soit $b\in]0,1[$. Pour tout $x\in[1-b,1+b]$, $|f_n(x)-f(x)|\leq nb^n$, d'où $\sup\limits_{[1-b,1+b]}|f_n-f|\leq nb^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b,1+b]$, où $b\in]0,1[$, donc aussi sur tout segment inclus dans $]0,2[$.
3. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\in]0,2[$ et $|f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})| = n|1-\frac{1}{n}|^n \sin\frac{\pi}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$. D'où $\sup\limits_{]0,2[}|f_n-f|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0,2[$.
4. On vérifie, par le calcul, ce que suggère le graphique : $|f_n(1-t)|=|f_n(1+t)|$ pour tout $t\in]0,1[$. On en déduit que $\sup\limits_{[0,2]}|f_n| = \sup\limits_{[0,1]}|f_n|$. Or, pour tout $x\in[0,1]$, $0\leq f_n(x)\leq n(1-x)^n\frac{\pi}{2}x = g_n(x)$. On étudie les variations de la fonction g_n sur $[0,1]$: son maximum est $g_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n \leq \frac{\pi}{2}$. D'où $|f_n(x)|\leq\frac{\pi}{2}$ pour tout $x\in[0,2]$. Puis on applique le théorème de la convergence dominée pour montrer que $\int_0^2 f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^2 f(x)\,dx = 0$.