Colle 09 Probabilités

SEVILEANU Romann

Exercice 1. Deux joueurs A et B disposent chacun d'une urne qui contient dix boules indiscernables au toucher. Il y a $b \geq 1$ boules noires dans l'urne de B et $a \geq 2$ boules noires dans celle de A.
A joue le premier. Pour cela, il tire au hasard une boule dans son urne. Si celle-ci n'est pas noire, il la replace dans son urne et c'est au tour de B de jouer. Sinon A tire une seconde boule dans son urne sans avoir remis la première tirée. Si cette deuxième boule n'est pas noire, il replace les deux boules dans son urne et c'est au tour de B de jouer. Sinon A a gagné la partie.
Pour jouer, B tire une boule de son urne. Si celle-ci n'est pas noire, il la replace dans son urne et c'est au tour de A de jouer. Sinon B a gagné la partie.
Peut-on choisir a et b pour que ce jeu soit équitable ?

Solution **1.** *Notons A_i, B_i, respectivement les événements : A (resp. B) tire deux boules noires (resp. 1 boule noire) après i essais. On a*

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{a}{10}\frac{10-a}{9},\ \mathbb{P}(B_i) = \frac{b}{10}$$

Soit $p_n = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1}(A_i \cap \overline{B}_i) \cap A_n)$ la probabilité que A gagne au n-ème essai. Les évènements A_i et B_j sont par hypothèses indépendants

$$p_n = \left(\frac{10-b}{10}\right)^{n-1}\left(1-\frac{a}{10}\frac{10-a}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{a}{10}\frac{10-a}{9}\right) = \frac{a}{10}\frac{a-1}{9} \times \left(\frac{10-b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}\right)^{n-1}$$

La probabilité pour que A gagne est alors $\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \sum_{n=0} p_n$.

On trouve donc la somme d'une série géométrique

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \frac{\frac{a}{10}\frac{a-1}{9}}{1-\frac{10-b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}}$$

De même,

$$\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = \frac{\frac{10-b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}}{1-\frac{10-b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}}$$

On peut vérifier que $\mathbb{P}(A \text{ gagne})+\mathbb{P}(B \text{ gagne}) = 1$, ce qui montre que le la probabilité que le jeu s'éternise est nulle. Les probabilités $\mathbb{P}(A \text{ gagne})$ et $\mathbb{P}(B \text{ gagne})$ sont égales si et seulement si

$$\frac{a}{10}\frac{a-1}{9} = \frac{10-b}{10}\frac{10-a}{10}\frac{9+a}{9}$$

ce qui équivaut à

$$10a(a-1) = (10-a)(9+a)b \iff 10a(a-1) = (90+a-a2)b \iff 10a(a-1) = 90b - a(a-1)b,$$

puis à

$$\iff a(a-1)(10+b) = 90b \iff a(a1) = \frac{3^2 \times 2 \times 5 \times b}{10+b}.$$

Comme ce nombre est entier, et que les facteurs premiers du numérateur sont inférieurs à 10, cela exclu les valeurs de b telles que $10+b$ soit premier c'est-à-dire $b = 1, 3, 7, 9$. On peut aussi éliminer 4, car 90 n'est pas divisible par 7, et 6, car le numérateur est divisible par 4 et non par 16. Il est facile de tester les valeurs restantes :

- *pour $b = 2$, l'équation devient $a(a-1) = 15$ qui n'a pas de solution entière*
- *pour $b = 8$, on trouve $a(a-1) = 40$ qui n'a pas non plus de solution entière,*
- *par contre, pour $b = 5$, on trouve*

  $$\frac{90b}{10+b} = 30 = 6 \times 5 = a(a-1),$$

  qui a comme solution entière $a = 6$.

LULE Arthur

Exercice 2. On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on intro duit les événements : $A_n =$ "On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences",
$B_n =$ "On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n-1$ et n".
Enfin, on pose $p_n = \mathrm{P}(B_n)$ et $p_1 = 0$.

1. Calculer p_2, p_3 et p_4.
2. Pour $n \geq 2$, vérifier

$$\mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{et} \quad p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

3. En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour tout $n \geq 1$.
4. Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Solution **2.**

1. *Notons* S_n *l'événement* $\ll$ *L'expérience au rang* n *est un succès* $\gg$. *On sait*

$$\mathrm{P}(S_n) = \mathrm{P}\left(\overline{S_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

On peut exprimer simplement [1] B_2, B_3 *et* B_4 *en fonctions des événements* S_n :

$$B_2 = S_1 \cap S_2, \quad B_3 = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4.$$

Par indépendance des résultats des différentes expériences

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

2. *L'événement* A_n *est la réunion des* B_k *pour* k *allant de 2 à* n *et ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par additivité, on a donc*

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{car} \quad p_1 = 0.$$

Étudions ensuite $\mathrm{P}(B_{n+3})$ *On exprime* B_{n+3} *comme intersection d'événements indépendants. L'événement* B_{n+3} *signifie que deux succès consécutifs sont rencontrés aux rangs* $n+2$ *et* $n+3$ *et que cette situation n'a pas été rencontrée précédemment :*

$$B_{n+3} = S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

Cependant, si l'expérience a réussi au rang $n+2$ *mais qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant ce rang, c'est qu'elle a échoué aul rang* $n+1$. *Ainsi,* $S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} \subset \overline{S_{n+1}}$ *et donc*

$$S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}}$$

Aussi, sachant que l'expérience a échoué au rang $n+1$, *affirmer qu'il n'y a pas eu deux succès consécutifs avant le rang* $n+2$ *revient à signifier qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant le rang* n :

$$\overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_n}.$$

Ainsi, on a l'égalité

$$B_{n+3} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_n}.$$

Enfin, les différentes expériences étant indépendantes et l'événement A_n *n'étant que fonctions des événements* $S_1, \ldots, S_n$, *les événements de l'intersection précédentes sont indépendants ce qui donne*

$$p_{n+3} = \mathrm{P}(B_{n+3}) = \mathrm{P}\left(\overline{S_{n+1}}\right) \mathrm{P}(S_{n+2}) \mathrm{P}(S_{n+3}) \mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

3. *L'égalité précédente démontrée pour* $n \geq 2$ *est aussi vraie pour* $n = 1$. *Pour* $n \geq 2$, *on peut alors écrire à la fois*

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{et} \quad p_{n+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right).$$

Par différence, on obtient $p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{1}{8} p_n$ *et cette égalité est encore vraie pour* $n = 1$.

4. $(p_n)_{n \geq 1}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre 3 :on calcule son polynôme caractéristique*

$$\chi_A = X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)$$

On a p_1, p_2 *et* p_3 *et on en déduit*

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

LE LABOUSSE Hugo

Exercice 3. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Pour $n \geq 4$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4. Un problème simple de démographie. Soit $a \in]0,1[$. Soit p_k, la probabilité qu'une famille ait k enfants. Nous supposons que

$$p_0 = p_1 = a,\ \forall k \geq 2,\ p_k = (1-2a)2^{-(k-1)},$$

et que $\mathbb{P}(\text{Fille}) = \mathbb{P}(\text{Garçon}) = \dfrac{1}{2}$.
On pose : E_n : “la famille a n enfants”, F_n : “n filles”, G_n : “n garçons”.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux filles aient deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles ?

Solution **3.** *1. On a* $p_1 = p_2 = 1$ *et* $p_3 = \dfrac{7}{8}$.

2. On note P_i *l'événement on obtient pile lors du i-ème lancer.* $F_i = \overline{P_i}$.
Soit A_n *l'événement : ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n = &= \mathbb{P}(A_n|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap F_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap P_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \end{aligned}$$

On en déduit $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}p_{n-3}$.

3. On pourrait calculer les racines de l'équation caractérique pour trouver p_n *puis la limite. Mais il est plus efficace de chercher les points fixe : il vient* $l = 0$.
Pour s'assurer que (p_n) *est effectivement convergente, il est clair qu'elle est décroissante et minorée.*

Solution **4.** *1. On a*

$$\mathbb{P}(E_2 \mid F_2) = \frac{\mathbb{P}(E_2 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(F_2 \mid E_2)}{\mathbb{P}(F_2)}$$

$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2|E_n)\mathbb{P}(E_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F_2|E_n) = \binom{n}{2}\frac{1}{2^n}.$$

On a $\mathbb{P}(F_2|E_0) = \mathbb{P}(F_2|E_1) = 0$.

$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n \binom{n}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1-2a}{4^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{4^{n-2}}.$$

On calcule la dérivée seconde de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ *et on obtient* $\mathbb{P}(F_2) = \dfrac{8(1-2a)}{27}$ *et*

$$\mathbb{P}(E_2|F_2) = \frac{p_2\dfrac{1}{4}}{\dfrac{8(1-2a)}{27}} = \frac{27}{64} \approx 0,42$$

2. On calcule $\mathbb{P}(G_2|F_2) = \dfrac{\mathbb{P}(G_2 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)}$.

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \mathbb{P}(E_4)\mathbb{P}(G_2 \cap F_2|E_4) = (1-2a)\frac{1}{2^3}\binom{4}{2}\frac{1}{2^4} = \frac{3(1-2a)}{64}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(G_2|F_2) = \frac{81}{512} \approx 0,518$$

Exercice 5. Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

— à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;

— le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

1. Établir que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Solution **5.**

1. *L'évènement B_n personne ne gagne au bout de n tours est décroissante et*

$$\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n).$$

Par limite décroissante, le jeu s'arrête presque sûrement.

2. *Soit G_{AB} l'évènement A et B jouent et A gagne.*
Pour que A gagne deux fois de suite (avant B et C) :
   (a) *soit A gagne la première partie et on a la distribuion*

$$G_{AB}\big(G_{CA}G_{BC}G_{AB}\big)^k G_{AC}$$

de probabilité $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{2}{7}$.

   (b) *soit A perd la première partie et on a la distribuion*

$$\big(G_{BA}G_{CB}G_{AC}\big)^k G_{AB},\ k \geq 1$$

de probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{2}{14}$.

et donc la probabilté que A gagne vaut $\frac{5}{14}$.

Pour B la probabilité de ganer est la même et pour C, elle vaut $\frac{4}{14}$.