CORRIGÉ DU KDO DU 29/11/2024

Séries de fonctions

Les questions ci-dessous sont la suite
des 14 questions de l'exercice du DS n° 3 « étoile ».

15. Pour quelles valeurs du réel x la série numérique $\sum(n+1)x^n$ est-elle convergente ?
16. On note $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Préciser l'ensemble de définition de la fonction ζ et montrer que cette fonction est décroissante.
17. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, montrer que les intégrales $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p[\ln(t)]^q\, dt$ et $\mathrm{I}_{p,q-1} = \displaystyle\int_0^1 t^p[\ln(t)]^{q-1}\, dt$ sont de même nature et que, si elles convergent, alors $\mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$.
18. En déduire que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ est convergente et vaut $\dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.
19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}\, dt$ converge absolument et qu'elle vaut
$$(-1)^n(n+1)!\zeta(n+2).$$
20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x^n[\ln(t)]^{n+1}}{n!(t-1)}\right| dt \leq \zeta(2)(n+1)|x|^n$.
21. On rappelle que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = \mathrm{e}^u$. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)\zeta(n+2)x^n.$$

---

15. Si $|x| \geq 1$, alors la suite $u_n = (n+1)x^n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $|x| < 1$, alors $|u_n| = (n+1)|x|^n = (n+1)|x|^{n/2}|x|^{n/2} = \underset{n\to\infty}{o}\left(|x|^{n/2}\right)$. Or la série géométrique $\sum\left(\sqrt{|x|}\right)^n$ converge. D'où la série $\sum u_n$ converge absolument.
Donc $\boxed{\text{la série } \sum(n+1)x^n \text{ est convergente si, et seulement si, } |x| < 1.}$

16. D'après le critère de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$. De plus, si $1 < x \leq y$, alors $\frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ D'où $\zeta(x) \geq \zeta(y)$. Donc
$$\boxed{\zeta(x) \text{ est défini si, et seulement si, } x > 1. \text{ Et la fonction } \zeta \text{ est décroissante.}}$$

17. L'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ est impropre en 0. Une intégration par parties, avec $0 < y \leq 1$, donne

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \int_y^1 t^p (\ln t)^q \, dt = \left[\frac{t^{p+1} (\ln t)^q}{p+1} \right]_y^1 - \frac{q}{p+1} \int_y^1 t^p (\ln t)^{q-1} \, dt.$$

Par croissances comparées, le terme entre crochets a une limite finie (qui vaut 0) quand y tend vers 0^+, d'où les intégrales $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p,q-1}$ sont de même nature et, si cette nature est de converger, alors, en faisant tendre y vers zéro, on obtient $\boxed{\mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1} \mathrm{I}_{p,q-1}.}$

18. On en déduit par récurrence sur q que :
   - les deux intégrales $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p,0}$ ont la même nature, qui est de converger car $\mathrm{I}_{p,0}$ n'est même pas impropre ;
   - $\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} \mathrm{I}_{p,0}$. Comme $\mathrm{I}_{p,0} = \int_0^1 t^p \, dt = \frac{1}{p+1}$, on obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}} \text{ pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2.}$$

19. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p(t) = -t^p \, [\ln(t)]^{n+1}$ pour tout $t \in]0,1[$. Chaque fonction f_p est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |f_p(t)| \, dt = |\mathrm{I}_{p,n+1}|$ d'après la question 18.
   - La série de fonctions $\sum f_p$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction F telle que

$$\forall t \in]0,1[, \ \mathrm{F}(t) = -\sum_{p=0}^{\infty} t^p \, [\ln(t)]^{n+1} = -[\ln(t)]^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} t^p = \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}.$$

   - La série $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_p(t)| \, dt = \sum |\mathrm{I}_{p,n+1}| = \sum \frac{(n+1)!}{(p+1)^{n+2}} = (n+1)! \sum \frac{1}{(p+1)^{n+2}}$ converge d'après la question 16 car $n+2 > 1$.

   Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque :

   la fonction F est intégrable, *i.e.* $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1} \, dt \text{ converge absolument et elle vaut}}$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 f_p(t) \, dt = -\sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{I}_{p,n+1} = \boxed{(-1)^n (n+1)! \zeta(n+2).}$$

20. De la question précédente, on déduit que

$$\int_0^1 \left| \frac{x^n [\ln(t)]^{n+1}}{n!(t-1)} \right| dt = \left| \int_0^1 \frac{x^n [\ln(t)]^{n+1}}{n!(t-1)} \, dt \right| = \frac{|x|^n}{n!} (n+1)! \zeta(n+2) = (n+1)|x|^n \zeta(n+2) \leq (n+1)|x|^n \zeta(2)$$

   car la fonction ζ est décroissante d'après la question 16.

21. En remplaçant t^x par $\mathrm{e}^{x \ln(t)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \, [\ln(t)]^n}{n!}$, on réécrit $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (\ln(t))^{n+1}}{n!(t-1)} \, dt$ pour tout $x > -1$. Pour intervertir série et intégrale, on utilise à nouveau le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(t) = \frac{x^n [\ln(t)]^{n+1}}{n!(t-1)}$ pour tout $t \in]0,1[$. Chaque fonction g_n est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question 20.
   - La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction G telle que

$$\forall t \in]0,1[, \ \mathrm{G}(t) = \frac{t^x \ln(t)}{t-1}.$$

   - la série $\displaystyle\sum \int_0^1 |g_n(t)| \, dt$ converge car $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)| \, dt \leq (n+1)|x|^n \zeta(2)$ d'après la question 20 et la série $\sum (n+1)|x|^n \zeta(2) = \zeta(2) \sum (n+1)|x|^n$ converge d'après la question 15.

   On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \ \mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) \zeta(n+2) x^n.$$