Théorème 6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si une suite de fonctions f_n continues en a converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est aussi continue en a.

$\forall x \in I,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

$\sum f_n$ CVU, d'où S_n CVU

Chaque f_n est continue, d'où S_n est continue.

Théorème 9

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue en a. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue en a.

Corollaire 7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une suite de fonctions f_n continues sur I converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est aussi continue sur I.

Je n'ai rien dit
(et il n'y a rien à dire).

Corollaire 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue sur I.

Théorème 9 (**d'interversion des limites**, aussi appelé théorème **de la double limite**)
Soient une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I et a une extrémité (éventuellement infinie) de cet intervalle. Si la suite de fonctions f_n converge uniformément sur I vers une fonction f et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a alors la suite de réels b_n converge vers un réel b et $\lim_{x\to a} f(x) = b$:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

$\sum_{k=0}^{n} f_k = S_n$ CVU, d'où $\lim_{x\to a} \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x)}$

$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} S_n(x).$

$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$

Théorème 12 (**de la double limite ou d'interversion somme-limite**)
Soient une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I et a une extrémité (éventuellement infinie) de cet intervalle. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la série de réels $\sum b_n$ converge et $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

$$\lim_{x\to a}\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

THÉORÈME 10
Si une suite de fonctions f_n, continues sur un segment $[a,b]$, converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors f est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt.$$

$\sum_{k=0}^{n} f_k = S_n$ CVU sur $[a,b]$ et chaque fonction S_n est continue, donc $\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(t)\,dt = \boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(t)\,dt}$

THÉORÈME 14 (d'intégration terme à terme) sur un segment)
Soient un segment $[a,b]$ et, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, une fonction f_n continue sur le segment $[a,b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Or $\boxed{}$

$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,dt$

$= \boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}} \int_a^b f_k(t)\,dt$

$= \sum_{k=0}^{\infty}$

THÉORÈME 11 (de la convergence dominée)
Soit un intervalle I et une suite de fonctions continues par morceaux sur I. Si :

1. la suite de fonctions f_n converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;
2. il existe une fonction φ continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) ;$$

Admis

alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables et la suite de réels $\int_I f_n$ converge vers le réel $\int_I f$.

$$\not\Downarrow \qquad\qquad \not\Uparrow$$

THÉORÈME 16 (d'intégration terme à terme) sur un intervalle quelconque)
Soient un intervalle I et une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Si :

1. la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S *cpm* sur I ;
2. la série de réels $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge ;

alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\, dt = \int_I S(t)\, dt.$

Admis

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$$

Théorème 15
Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Si :

(i) la suite des fonctions f_n converge simplement sur $[a, b]$;

(ii) la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ;

alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], \; f'(x) = g(x)$.

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{CVS sur } [a,b]$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} f'_k \quad \text{CVU}$$

Théorème 18 (de dérivation terme à terme)
Soient un segment $[a, b]$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Si :

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction S ;

(ii) la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$;

alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], \; S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

Corollaire 18

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si :

(i) pour chaque $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite des fonctions $f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;

(ii) la suite des fonctions $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in [\![0, k]\!],\ \forall x \in I,\ f_n^{(j)}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{(j)}(x)$.

Corollaire 19

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. Si :

(i) pour chaque $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in [\![0, k]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(x)$.