Suites et séries de fonctions

1 Convergence uniforme de suites de fonctions

Exercice 1. ♡ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $I=]-\pi,\pi[$ par

$$f_n(0)=0,\quad f_n(x)=\frac{\sin^2 nx}{n\sin x},\ x\neq 0.$$

Étudier la convergence simple ou uniforme de la suite (f_n) sur tout ou partie de l'intervalle I.

Exercice 2. ♡ On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement et vers quelle fonction ?
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[-a,a]$, $a>0$?

Exercice 3. ♡* Montrer que la suite de fonctions $f_n : [1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ converge uniformément vers $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 4. On pose $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$, $a>0$.

Exercice 5. ♡ Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $u_n(x)=\frac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$;
2. $u_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}$ et $v_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$. sur $\mathbb{R}$;
3. $u_n(x)\frac{1-x^n}{1+x^n}$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_n(x)=\sin(x)\exp(-nx)$ sur $\mathbb{R}^+$;
5. $f_n(x)=x^2\exp\left(-\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ sur $\mathbb{R}$;
6. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$.
7. Etudier la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour $n\geq 1$ par $f_n(x)=\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

2 Propriétés de la convergence uniforme

Exercice 6. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément convergente vers une fonction f sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $(\sin(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sin(f)$. Comment généraliser ce résultat ?

Exercice 7. **

1. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ avec $\alpha<\beta$, $M\geq 0$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions M-lipschitziennes de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[\alpha,\beta]$, la convergence est en fait uniforme.

2. Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert, et (f_n) une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans $]a, b[$.

Exercice 8. *** *(Théorème de Dini)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur $[a, b]$ un segment. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simlement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Exercice 9. * L'hypothèse I segment dans le théorème de Dini est indispensable : Donner un exemple de suites de fonctions définies sur $]a, b[$, croissantes, continues qui converge simplement vers une fonction continue, mais telle que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 10. ♡ Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 11. ♡ Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = (n + 1)\sin x \cos^n x$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt\right)$. La convergence de la suite est-elle uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

3 Convergence uniforme et suites récurrentes

Exercice 12. ♡♡* On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\, dt.$$

1. Montrer que f_n est polynomiale. Quel est son degré ?
2. Montrer que $f_n(x) + f_n(1 - x)$ ne dépend pas de x.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}$$
4. En déduire la convergence de $\sum \|f_{n+1} - f_n\|_\infty$.
5. Établir que (f_n) converge uniformément vers une fonction f non nulle vérifiant
$$f'(x) = f(x - x^2)$$

Exercice 13. ♡** On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}(1 - \frac{\sqrt{x}}{2})^n.$$
3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.
4. Montrer que l'application $x \to |x|$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de polynômes.

4 Théorème de Weierstrass algébrique

Exercice 14. *** Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ Pour n entier naturel non nul donné, le n-ème polynôme de Bernstein associé à f est

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On veut montrer que la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

1. On pose

$$\begin{cases} \varphi_n : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} e^{kt} = \left[xe^t + (1-x)\right]^n \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $B_n(x^d) = \dfrac{1}{n^d} \times \dfrac{\partial^d \varphi_n(x,0)}{\partial t^d}$ (on dérive suivant t, puis on pose $t = 0\,!$).

   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$.

   (c) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

2. Montrer que la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f.

Exercice 15. * Montrer que si une f est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, alors f est aussi un polynôme.

Exercice 16. ** Montrer que $\mathrm{Vect}\,(t^{2n},\ n \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ munie la norme de la convergence uniforme.

Exercice 17. Soit f continue et convexe sur un segment S. Montrer que f est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales convexes.

5 Séries de fonctions

Exercice 18. ♡* Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.

7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ ne convergence pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19. * Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = (n+1)\sin x \cos^n x$.

1. Montrer que $\sum f_n$ est converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exercice 20. ** Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note sa somme $S(x)$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?
4. *** Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 21. ♡*(*Convergence uniforme non normale*) On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

   et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 22. * Étude de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 23. ♡♡*(*Fonctions zeta*) On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Exercice 24. ♡** Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout k, $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.

Exercice 25. **(Limite en $+\infty$ par comparaison à une intégrale)* Soit la série de fonctions

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2 + t^2} dt.$$

3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 26. Trouver les fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(x) = \sum_{n=1} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$.

Suites et séries de fonctions

(Solutions)

Solution 1. On a
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin x}.$$
On a donc convergence simple sur I de la suite (f_n) vers la fonction nulle (la convergence simple en 0 est évidente) mais on n'a pas de convergence uniforme vers la fonction nulle car si $x_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = \sin^2 1 \neq 0$.
Par contre sur tout segment de la forme $[-\pi + \delta, \delta]$ ou $[\delta, \pi - \delta]$, on a
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin \delta},$$
qui donne la convergence uniforme.

Solution 2. 1/ Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout n. Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x) \sim x$ donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x$.
2/ Pour $x_n = n$, on a
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} n(\sin(1) - 1) = -\infty$$
donc on n'a pas la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3/ Sur le segment $[-a, a]$, on étudie la fonction $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $g_n'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right) - 1$ qui est décroissante négative sur $[-a, a]$ et donc $|g_n(x)| \leq |g_n(a)| = a - n \sin \dfrac{a}{n}$ qui tend vers 0 et donc on a la convergence uniforme sur tout segment.

Solution 3. Pour $x \in [1, +\infty[$ fixé,
$$\left| \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} \left| 1 - e^{-\frac{1}{n} \ln x} \right| \leq \frac{1}{x} \left| 1 - e^{-\frac{1}{n} \ln x} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
ce qui montre la convergence simple sur $[1, +\infty[$ de la suite (f_n) vers $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
1/ Pour montrer la convergence uniforme, on peut tenter de majorer $|f_n - f|$: Pour $1 > \varepsilon > 0$ fixé, pour tout $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, l'inégalité précédente montre que
$$\left| \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \leq \varepsilon$$
et pour $1 \leq x \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$
$$\left| \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x} \right| \leq \left| 1 - e^{-\frac{1}{n} \ln x} \right| \leq \left| 1 - e^{\frac{1}{n} \ln \varepsilon} \right|$$
suite qui tend vers 0, donc il existe N tel que
$$\forall n \geq N, \forall x \in [1, +\infty[,\ \left| \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x} \right| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la convergence uniforme.

2/ Mais étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ est ici plus simple : on calcule

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{n}x^{\frac{2}{n}} - (x^{\frac{1}{n}} - 1) \times (1 + \frac{1}{n}) \times x^{\frac{1}{n}}}{x^{2+\frac{2}{n}}} = \frac{-x^{\frac{2}{n}} + (1 + \frac{1}{n}) \times x^{\frac{1}{n}}}{x^{2+\frac{2}{n}}}.$$

Donc $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ et alors $|\varphi(x)| = |\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})}| \leq \frac{1}{n}$. Et la suite (f_n) converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Solution 4. Pour tout n, $f_n(1) = 1$ et si $x \neq 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit que (f_n) coverge simplement vers la fonction qui vaut 1 en 1 et 0 sinon.

Les fonctions f_n sont continues, mais la limite simple ne l'est pas, f ne peut donc la convergence n'est pas uniforme.

Sur $[a, +\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$ donc la convergence est uniforme sur cet intervalle, de même par parité sur $]-\infty, -a]$

Solution 5.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(x) = \frac{x}{x+n}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour x fixé, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. De plus, pour tout $a > 0$ et $x \in [0, a]$, $|u_n(x)| \leq \frac{a}{n}$. Donc la suite (u_n) converge niformément vers 0 sur $[0, a]$. Mais $u_n(n) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. La suite $u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour x fixé $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$. On en déduit que la convergence n'est pas uniforme au voisinage de 0, puisque les fonctions u_n sont continues en 0 mais pas la limite simple. On peut aussi vérifier que $\lim_{n\to+\infty} u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq 0$. De plus, pour tout $a > 0$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2a^2} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Donc la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$.
   Si $v_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, alors converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. De plus, $v_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. On en déduit que $\|v_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Donc la suite $(v_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
3. Notons que la suite $(u_n(x))$ n'est pas définie pour $x = -1$. On vérifie qe pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \mathbb{1}_{]-1,1[} - \mathbb{1}_{]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}(x)$. La convergence n'est pas uniforme au voisingae de 1, car la limite simple n'est pas continue.
   Pour tout $0 < a < 1$, $\forall x \in [-a, a]$, $|u_n(x) - 1| = |\frac{2x^n}{1+x^n} \leq 2a^n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Donc, la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.
   Pour tout $a > 1$, $\forall x$, $|x| > 1$, $|u_n(x) + 1| = |\frac{2}{1+x^n} \leq \frac{2}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Donc, la convergence est uniforme sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \sin x \exp(-nx)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour x fixé, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
   De plus, $|f_n(x)| \leq x\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{\ln n}]} + \exp(-\frac{n}{\ln n})\mathbb{1}_{]\frac{1}{\ln n},+\infty[} \leq \frac{1}{\ln n} + \exp(-\frac{n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$, donc la suite converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = x^2 \exp(-\sin\frac{x}{n})$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour x fixé, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x^2$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

De plus, pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$,

$$|f_n(x) - x^2| \leq x^2 \left(1 - \exp(-\sin(\frac{x}{n}))\right) \leq a^2 \left(1 - \exp(-\sin(\frac{a}{n}))\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Donc la suite converge uniformément vers la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, a]$.
De plus, $f_n(\frac{\pi n}{2}) - \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi^2 n^2}{4}(1 - e^{-1})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ est bien défini et pour x fixé, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, comme $\sin x \leq x$,

$$|f_n(x)| = |\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}]} + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n}, +\infty[} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Donc la convergence est uniforme sur $]0, +\infty[$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 1$. Pour $x \neq 0$ et $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n \ln(\cos \frac{x}{\sqrt{n}})\right)$ et

$$n \ln(\cos \frac{x}{\sqrt{n}}) \sim n(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Par contnuité de la fonction exponentielle, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \exp(-x^2/2)$. Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto exp(-x^2/2)$.
On remarque que $|f_n(2\pi\sqrt{n}) - \exp(2\pi\sqrt{n})| = 1 - \exp(-2\pi^2 n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
Pour tous $A > 0$ et n tel que $n > \dfrac{4}{\pi^2} A^2$, $x \in [0, A]$ implique $\dfrac{x}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On étudie la fonction

$$g_n(x) = |f_n(x) - \exp(-x^2/2)| = \exp(-x^2/2) \left| \exp\left[n \ln(\cos \frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{x^2}{2}\right] - 1 \right|$$

La fonction $\varphi_n : x \mapsto n \ln(\cos \frac{x}{\sqrt{n}}) + \frac{x^2}{2}$ est dérivable et $\varphi' = -\sqrt{n} \tan \dfrac{x}{\sqrt{n}} + x < 0$. On en déduit que $g_n(x) \leq |\exp(\varphi_n(A)) - 1|$ qui tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, A]$ vers $\exp(-x^2/2)$.

Solution 6. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne, alors $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq k|f_n(x) - f(x)|$ qui montre que la convergence uniforme est conservée.

Solution 7.

1. On commence par remarquer, que par passage à la limite dans les inégalités, f est elle-même M-lipschitzienne. Fixons $\varepsilon > 0$. On fixe une subdivision de $[\alpha, \beta]$ de la forme $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p = \beta$ telle que $\alpha_{i+1} - \alpha_i < \frac{\varepsilon}{M}$. Chaque suite $(f_n(\alpha_i))$ converge vers $f(\alpha_i)$. Puisqu'il y en a un nombre fini, on en déduit qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon$. Prenons maintenant $x \in [\alpha, \beta]$. Il existe un i tel que $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(\alpha_i) - f_n(x)| + |f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| + |f(\alpha_i) - f(x)| \\ &\leq M|x - \alpha_i| + \varepsilon + M|x - \alpha_i| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[\alpha, \beta]$.

2. On va se ramener à la question précédente. Pour cela, fixons $[\alpha,\beta]\subset]a,b[$. Soit également $a<\alpha'<\alpha$ et $\beta<\beta'<b$. Alors, puisque f_n est convexe, on a pour tout $(x,y)\in[\alpha,\beta]$, $x\neq y$, :

$$\frac{f_n(\alpha)-f_n(\alpha')}{\alpha-\alpha'}\leq\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\leq\frac{f_n(\beta')-f_n(\beta)}{\beta'-\beta}.$$

Les membres de gauche et de droite sont des suites qui admettent une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Ce sont donc des suites bornées. On en déduit l'existence de $M>0$ tel que, pour tout $x,y\in[a,b]$, $x\neq y$, pour tout $n\geq 0$,

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right|\leq M.$$

Autrement dit, les fonctions (f_n) sont M-lipschitziennes sur $[\alpha,\beta]$. Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question.

Solution 8.

La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante convergente, on en déduit que la suite $\big(f(x)-f_n(x)\big)$ est positive décroissante et f_n et f étant continues sur un segment, $\alpha_n=\sup|f(x)-f_n(x)|$ est atteint : on pose $\alpha_n=f(l_n)-f_n(l_n)$. La suite (l_n) étant à valeurs dans un segment, on peut en extraire une suite $(l_{\rho(n)})$ convergente, on note l sa limite. Comme (α_n) est décroissante, (α_n) converge vers $\alpha\geq 0$.
Or

$$0\leq\alpha\leq\alpha_{\rho(n)}=f(l_{\rho(n)})-f_{\rho(n)}(l_{\rho(n)})$$

La fonction ρ est strictement croissante, donc pour tout $p\geq 0$, $\rho(p)\geq p$.
On en déduit que pour p fixé, $n\geq p$ implique $\varphi(n)\geq p$ et alors en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$0\leq\alpha\leq f(l_{\rho(n)})-f_{\rho(n)}(l_{\rho(n)})\underset{(1)}{\leq}f(l_{\rho(n)})-f_p(l_{\rho(n)})\underset{n\to+\infty}{\Rightarrow}0\leq\alpha\leq f(l)-f_p(l).$$

L'inégalité (1) résultant de la croissance de $f_p(l_{\rho(n)})$ comme fonction de paramètre p.
Il reste à faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir $\alpha=0$.
Une autre solution est de fixer $\varepsilon>0$, et de considérer le compact

$$U_n=\{x\in[a,b],f(x)-f_n(x)\geq\varepsilon\}$$

Par croissance de la suite (f_n), la suite (U_n) est une suite décroissante de compacts. Si tous les U_n sont non-vides, on sait que $\cap_n U_n\neq\emptyset$. Soit α dans cette intersection, alors pour tout n, $f(\alpha)-f_n(\alpha)\geq\varepsilon$, ce qui contredit la convergence de la suite $(f_n(\alpha)$ vers $f(\alpha)$.
Cette intersection est donc vide, et par suite décroissante de compactes, il existe N tel que pour $n\geq N$, $U_n=\emptyset$. Cela signifie que pour tout x, $f(x)-f_n(x)\leq\varepsilon$, d'où la convegence uniforme.

Solution 9. la suite $(f_n)_{n\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{-1}{1+nx}$ est croissante et converge simplement vers la fonction nulle mais la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=-\dfrac{-1}{2}$

Solution 10.

1. Pour $x=0$, on a $f_n(x)=0$. Pour $x\neq 0$, on a $f_n(x)\sim_{+\infty}\frac{2^nx}{n2^nx^2}\to 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. On a

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^1\frac{2^nx}{1+2^nnx^2}dx\\&=\left[\frac{1}{2n}\ln\left(1+2^nnx^2\right)\right]_0^1\\&=\frac{1}{2n}\ln(1+2^nn).\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que
$$I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}\ln(2^n n) = \frac{n\ln 2 + \ln n}{2n} \to \frac{\ln 2}{2}.$$
Si la suite (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, on aurait d'après le théorème d'inversion limite/intégrale
$$\frac{\ln 2}{2} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt = \int_0^1 0dt = 0.$$
Ce n'est pas le cas, donc on n'a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

3. Posons $x_n = \frac{1}{2^n}$. Alors
$$f_n(x_n) = \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \to 1.$$
En particulier, pour n assez grand, on a
$$\|f_n - 0\|_\infty \geq f_n(x_n) \geq 1/2.$$
Ceci prouve directement que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Solution 11.

1. Pour $\in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|\cos x| < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\sin x\cos^{n+1} x = 0$ (le critère u_{n+1}/u_n par exemple !).
De plus, $f_n(0) = 0$.
La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle.
2. La convergence est uniforme sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$. On écrit alors
$$(n+1)|\sin x\cos^n x| \leq (n+1)\cos^n \delta.$$
D'où la convergence uniforme.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \left[-\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2}$. Si la convergence était uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on aurait
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = 0.$$

Remarque : on pouvait étudier la suite de fonctions $g_n(x) = n \times \sqrt{1-x^2} \times x^n$.

Solution 12.

1. On montre par récurrence que f_n est une fonction polynomiale de degré $2^n - 1$.
2. Si $n = 0$ le résultat est acquis : $f_0(x) + f_0(1-x) = 2$ ne dépend pas de x.
De plus, $f_{n+1}(1-x) = 1 + \int_0^{1-x} f_n(t-t^2)dt = 1 + \int_x^1 f_n(u-u^2)du$, en posant $u = 1-t$. On obtient ainsi
$$f_n(x) + f_n(1-x) = 2 + \int_0^1 f_n(t-t^2)dt,$$
expression qui ne dépend pas de x.
3. Une récurrence n sur montre le résultat.
4. Avec la question, on obtient
$$\|f_{n+1} - f_n(x)\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$$
qui est le reste d'une série convergente (la série exponentielle) et donc la série de gauche est normalement convergente.
5. On en déduit la suite de terme $f_n = \sum_{k=0}^{n-1}(f_{k+1} - f_k)$ converge uniformément.

6. Pour tout n, par définition f_{n+1} est la primitive valant 1 en 0 de $x \mapsto f_n(x-x^2)$ donc est dérivable de dérivée continue $f(x-x^2)$ terme d'une série uniformément convergente sur $[0,1]$ d'après ce qui précède et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut intervertir limite et intégrale $f(x) = 1+\int_0^x f(t-t^2)\,dt$ d'où la relation pour f'.

Solution 13.

1. Fixons $x \in I$ et posons, pour $t \in I$, $\phi(t) = t + \frac{1}{2}(x-t^2)$, de sorte que $f_{n+1}(x) = \phi(f_n(x))$. Posons, pour simplifier les notations, $u_n = f_n(x)$. On doit étudier la suite récurrente $u_{n+1} = \phi(u_n)$, avec $u_0 = 0$. Remarquons que $\phi'(t) = 1-t \geq 0$ et donc ϕ est croissante sur I. On a de plus $\phi(I) = [\phi(0), \phi(1)] = [x/2, (x+1)/2]$ et donc $\phi(I) \subset I$. Ainsi, (u_n) est à valeurs dans I. De plus, $u_1 \geq u_0$ et donc la suite (u_n) est croissante. Ainsi, la suite est croissante, majorée donc elle converge. Sa limite l vérifie $\phi(l) = l$ soit immédiatement $l = \sqrt{x}$.
2. D'après la question précédente, on sait que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $f_n(x) \leq \sqrt{x}$ (la suite est croissante). On en déduit que
$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - f_n(x) - (x - f_n(x)^2)/2 \\ &= \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - (\sqrt{x} + f_n(x))/2\right) \\ &\leq (\sqrt{x} - f_n(x))(1 - \sqrt{x}/2). \end{aligned}$$
Par récurrence immédiate, on obtient
$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq (\sqrt{x} - f_0(x))(1 - \frac{\sqrt{x}}{2})^n,$$
ce qui est le résultat demandé.
3. Si on étudie la fonction $t \mapsto t(1-t)^n$ sur $[0,1]$, on vérifie qu'elle atteint son maximum en $t = 1/(n+1)$. On en déduit que
$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq 2\frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$
Passant par l'exponentielle, on remarque que
$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$
et donc on a majoré $|\sqrt{x} - f_n(x)|$ par une quantité indépendante de x et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la suite sur $[0,1]$.
4. On pose $Q_n(x) = f_n(X^2)$ et la suite (Q_n) converge uniformément vers $|x|$.

Solution 14.

1. (a) On dérive le binôme de Newton terme à terme
$$\frac{\partial^d \varphi_n(x,t)}{\partial t^d} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} k^d e^{kt}$$
En évaluant en 0 ces deux quantités on trouve
$$\frac{1}{n^d}\frac{\partial^d \varphi_n}{\partial t^d}(x,0) = B_n(x^d)$$
(b) Or $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t}(t) = nxe^t\left[xe^t + (1-x)\right]^{n-1}$ et
$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial^2 t}(t) = \left[n(n-1)x^2 + nx\left[xe^t + (1-x)\right]\right] e^t \left[xe^t + (1-x)\right]^{n-2}$$
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1) = 1$ (la fonction constante), $B_n(x) = x$ et $B_n(x^2) = \dfrac{n(n-1)}{n^2}x^2 + \dfrac{nx}{n^2} = \dfrac{n-1}{n}x^2 + \dfrac{1}{n}x$.

(c) On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}\right)^2\\
&+ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}x^2\\
&- 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}x\\
&= B_n(x^2)-2xB_n(x)+x^2\\
&= \left(\frac{n-1}{n}-2+1\right)x^2+\frac{1}{n}x\\
&= \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

2. Remarquons que

$$|f(x)-B_n(f(x))| \leq \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}.$$

(a) La fonction f est continue sur un segment, donc uniformément continue :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta_\varepsilon>0,\ \forall x,y\in[0,1],\ |x-y|\leq\eta_\varepsilon,\ |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

De sorte que, si $|\frac{k}{n}-x|\leq\eta_\varepsilon$, on a en particulier :

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\eta_\varepsilon \implies \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\varepsilon.$$

Pour x fixé, soit $J(x)$ l'ensemble des indices k tels que $|\frac{k}{n}-x|\leq\eta_\varepsilon$. On a

$$\sum_{k\in J(x)}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}\leq\varepsilon$$

(b) De plus, si $k\in J(x)^c$, alors $|\frac{k}{n}-x|\geq\eta_\varepsilon$ et si M est un majorant de $|f|$, on a

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{2M}{\eta_\varepsilon^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in J(x)^c}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} &\leq \frac{2M}{\eta_\varepsilon^2}\sum_{k\in J^c}\binom{n}{k}(\frac{k}{n}-x)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{2M}{\eta_\varepsilon^2}\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n}-x)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{2M}{\eta_\varepsilon^2}\frac{x(1-x)}{n}\quad(*)\\
&\leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}\\
&\leq \varepsilon\quad\text{pour } n>n_0>>0
\end{aligned}$$

L'inégalité $(*)$ vient du fait que le maximum de $x\mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $1/2$ et vaut $1/4$.

(c) On a alors, pour $n \geq n_0$:
$$\forall x \in [0,1], |f(x) - B_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$
Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite (B_n) vers f.

(d) Posons $g(x) = f(a + (b-a)x)$, pour $x \in [0,1]$. La suite (B_n) de polynômes de Bernstein associée à g converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Posons $Q_n(x) = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a,b]$. (Q_n) est encore une suite de fonctions polynomiales, et par construction (Q_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Solution 15. Soit (P_n) une telle suite de polynôme, alors elle vérifie le critère de Cauchy uniforme :
$$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N},\ n,p \geq N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_p(x)| \leq \varepsilon.$$
Le polynôme $P_n - P_p$ est donc borné sur $\mathbb{R}$, c'est un polynôme constant et comme il tend vers 0, c'est le polynôme nul.
Ceci montre que le théorème de Weierstrass n'est valable que sur un segment.

Solution 16. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$ Le théorème d'approximation algébrique de Weierstrass assure l'existence d'une suite polynomiale (P_n) qui converge uniformément vers g sur $[-1,1]$.
Alors, la suite polynomiale $\left(\frac{1}{2}(P_n(x) + P_n(-x)\right)_n$ converge uniformément vers g sur $[-1,1]$ puisque $g(-x) = g(x)$.
On en déduit que la suite de polynômes $\left(\frac{1}{2}(P_n(x) + P_n(-x)\right)_n \in \mathrm{Vect}\,(t^{2n},\ n \in \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ et converge uniformément sur $[0,1]$ vers f. D'où la densité recherchée.

Solution 17. On sait que f est limite uniforme de ses polynômes de Bernstein $B_n(f)$. On montre que les polynômes de Bernstein $B_n(f)$ sont alors convexes sur $[0,1]$: on écrit la dérivée de $B_n(f)$ sous la forme
$$B_n(f)'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f((k+1)/n) - f(k/n)x^k(1-x)^{n-1-k}$$
et donc la dérivée seconde comme
$$B_n(f)''(x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(f((k+2)/n) - 2f((k+1)/n) + f(k/n))x^k(1-x)^{n-2-k}.$$
Comme f est convexe $f((k+2)/n) - 2f((k+1)/n) + f(k/n) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Solution 18.

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.
2. On va prouver la convergence normale. On a en effet, pour tout $x \in [0,A]$,
$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$
terme général d'une série convergente.
3. Il suffit d'écrire que, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2 + k^2 \leq 5n^2$, et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5n}$. On obtient finalement
$$v_n \geq n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

4. Il est plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$
En particulier, pour $n = N$ et $x = N$, on doit avoir
$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_n(n) \leq \varepsilon.$$
Mais,
$$\varepsilon \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_n(n) \geq \frac{1}{5}.$$
Bien sûr, si $\varepsilon < 1/5$, c'est impossible.
Cette partie de la démonstration est souvent rédigée en niant le critère de Cauchy uniforme.
5. Nous allons prouver la convergence uniforme en utilisant le critère des séries alternées. En effet, à x fixé, la suite $(u_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)$ est donc convergente, et on a la majoration du reste :
$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)\right| \leq u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$
Reste à majorer le membre de droite de l'équation précédente par un terme qui tend vers 0 et ne dépend pas de x. Mais on a
$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+n^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \leq \frac{1}{n}.$$
On a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
6. Puisque $|(-1)^n u_n(x)| = |u_n(x)|$, la convergence normale sur $[0, A]$ se démontre comme ci-dessus.
7. D'autre part, si on avait convergence normale sur $\mathbb{R}_+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_n u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la première question.

Solution 19. La convergence simple et normale sur le segment indiqué est facile.
On calcule ensuite la limite de la série des primitives $F_n = \cos^{n+1} x$ que l'on connaiit et la dérivée de cette somme est la somme des (f_n) modulo la convergence normale.

Solution 20.

1. On va appliquer le critère des séries alternées. Il est clair que $|u_n(x)|$ tend vers 0, reste à voir que, pour $x \geq 0$, on a $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)[$. Mais,
$$\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)},$$
et on conclut par croissance de la fonction logarithme.
2. Le critère des séries alternées nous donne même une majoration du reste de la série. On a en effet
$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k\geq n+1} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$$
où on a utilisé que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > -1$. On a majoré le reste indépendamment de $x \in \mathbb{R}_+$ par quelque chose qui ne dépend pas de n. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. On n'a même pas convergence absolue de la série à $x > 0$ fixé. Par exemple,

$$|u_n(1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum_n |u_n(1)|$ diverge. A fortiori, il en est de même de la série $\sum_n \|u_n\|_\infty$.

4. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ nous permet d'utiliser le thérème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

Avec $v_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$, on a

$$v_{2n+1} + v_{2n+2} = \ln\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)$$

Si $p_n = \exp(S_{2n+2})$, on a

$$p_n = \frac{1\times 3}{2^2} \times \cdots \times \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{(2n+1)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)\right)^2}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^2} = \frac{(2n+1)\,(2n!)^2}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^4} = \frac{(2n+1)\,(2n!)^2}{2^{4n}\,(n!)^4}$$

Avec la formule de Stirling, on obtient

$$p_n = \frac{(2n+1)\,(2n!)^2}{2^{4n}\,(n!)^4} \sim \frac{2n\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \times 4\pi n}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} \times 4\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi}.$$

et donc (S_n) converge vers $-\ln\pi + \ln 2$.

<u>**Solution 21.**</u> 1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

2. Une étude rapide de u_n montre qu'elle atteint son maximum en $1/n$. On a donc

$$\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n\ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.

3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour $x > 0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ et $0 < e^{-x} < 1$. On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut étudier cette fonction ou remarquer que

— Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} \to 1.$$

— La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type $[0, A]$.
— La fonction tend vers 0 en $+\infty$, on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle $[A, +\infty[$.

On peut aussi écrire
$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$
puisque par convexité de la fonction exponentielle, $e^x - 1 \geq x$.
Soit M un majorant de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$ (l'inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$) :
$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$
On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 22. 1. Il est clair que la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$, pour $x > -1$ fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout $x > -1$.

2. Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Nous avons vérifié à la question précédente que, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_n u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste $R_n(x)$ vérifie
$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$
Puisque $x > -1$, on a en particulier
$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$
Ceci tend vers 0 (indépendamment de x), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ sur I. Puisque chaque fonction u_n est continue, la fonction S est continue sur I.

3. Chaque fonction u_n est dérivable sur I avec $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De même qu'à la question précédente, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)$ son reste, on a $|T_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, inégalité valable pour tout $x > -1$. On peut donc majorer **uniformément** le reste par une quantité qui tend vers 0 : la série dérivée est uniformément convergente. On en déduit que la fonction S est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici
$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq u'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$
En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.

4. De même qu'à la question précédente, par le critère des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives :
$$\frac{-1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$
Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour prouver que
$$\lim_{x\to -1} S(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} S(x) = 0.$$

Solution 23.

1. La série définissant $\zeta(s)$ est une série de Riemann. Elle est convergente si et seulement si $s > 1$. De plus, pour chaque $n \geq 1$, les fonctions $s \mapsto n^{-s}$ sont décroissantes, et même strictement décroissantes pour $n \geq 2$. Pour $1 < s < t$, on a donc
$$1 + 2^{-s} > 1 + 2^{-t} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} > \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^t}$$
on en déduit que
$$\zeta(s) > \zeta(t),$$
ce qui prouve que ζ est strictement décroissante.
2. Chaque fonction $s \mapsto n^{-s}$ est continue sur son domaine de définition. Il suffit de démontrer que la série de fonctions converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$, avec $a > 1$, pour prouver que la fonction est continue sur $]1, +\infty[$. Or, pour tout $s \in [a, +\infty[$, on a
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^a},$$
et le terme de droite est le terme général d'une série numérique convergente. Ceci prouve la convergence normale de f sur $[a, +\infty[$.
3. Puisque la série définissant ζ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites, et on obtient
$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$
4. Pour $x \in [k, k+1]$, on a
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
En intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, on trouve
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
On somme maintenant ces deux inégalités pour k allant de 1 à $+\infty$. On obtient
$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s).$$
Or,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$
On obtient finalement :
$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$
ou encore
$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$
Par le théorème d'encadrement des limites, $(s-1)\zeta(s)$ tend vers 1 lorsque s tend vers 1. C'est bien que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$. En particulier, $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = +\infty$.
5. On va démontrer que ζ est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$ et prouver que $\zeta''(s) \geq 0$ pour tout $s > 1$. Pour prouver que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$, on prouve que la série dérivée converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 1$. Notons $f_n(s) = n^{-s}$, $n \geq 1$ et $s > 1$. Alors $f_n'(s) = (-\ln n)n^{-s}$. Pour $s \in [a, +\infty[$, on a
$$|f_n'(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Or, le terme apparaissant à gauche est le terme général d'une série numérique convergente. En effet, pour $b \in]1,a[$, on a
$$n^b\frac{\ln n}{n^a} \to 0 \text{ et donc } \frac{\ln n}{n^a} = o(n^{-b}).$$
Comme $\sum_{n\geq 1} n^{-b}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^a}$. Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que ζ est C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$, donc sur $]1,+\infty[$, et que sa dérivée ζ' vérifie
$$\zeta'(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{-\ln n}{n^s}.$$
De même, on prouve que ζ est de classe C^2 et que
$$\zeta''(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$
Comme tous les termes apparaissant dans la série sont positifs, on en déduit que ζ'' est positive. En particulier, ζ est convexe.

6.

Solution 24.

1. La convergence simple est immédiate. Pour la convergence normale, remarquons que le maximum de xe^{-nx} sur $[0,+\infty[$ est $\dfrac{1}{en}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en\ln n}$. Mais la série de Bertrand $\frac{1}{n\ln nn}$ diverge, et notre série ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$. Prouvons maintenant la convergence uniforme : pour $x>0$, on a :
$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}e^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{(e^x-1)\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$
où on a utilisé pour la dernière inégalité que $e^x-1\geq x$. C'est aussi vrai pour $x=0$: il y a convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.
2. On peut prouver que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ en étudiant la convergence uniforme de S' sur $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Mais il y a plus malin : posons effectivement $A(u)=\sum_{n\geq 2}\frac{u^n}{\ln n}$. Cette série entière a pour rayon de convergence 1 d'après la règle de D'Alembert. Elle est donc C^∞ sur $]-1,1[$. Mais $S(x)=xA(e^{-x})$. On en déduit que S est C^∞ sur $]0,+\infty[$.
3. On a, pour $x>0$, et $N>0$:
$$\frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^{N}\frac{e^{-nx}}{\ln n} \geq e^{-Nx}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\ln n}.$$
Posons $x_N=\frac{1}{N}$. On a $e^{-Nx}=\frac{1}{e}$, et
$$\frac{S(x_N)}{x_N} \geq \frac{1}{e}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\ln n}.$$
S n'est pas dérivable en 0 (en travaillant un tout petit peu plus, on aurait pu prouver que la limite de $S(x)/x$ en 0 est $+\infty$).
4. Avec les notations de la deuxième question, on a $A(u)\sim_0 \frac{u^2}{ln 2}$. Donc $S(x)\sim_{+\infty}\frac{xe^{-2x}}{\ln 2}$, ce qui prouve bien ce que l'on cherchait à montrer. Cette méthode est assez astucieuse. On pouvait également faire plus classique en utilisant une méthode de "double limite".

Solution 25.

1. Remarquons d'abord que la série est convergente quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $u_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et fixons $M > 0$. Alors, pour tout $x \in [-M, M]$, on a
$$|u_n(x)| \leq \frac{M}{n^2},$$
et le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-M, M]$. Puisque chaque fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue, on en déduit que S est continue sur $[-M, M]$. Comme $M > 0$ est arbitraire, on en déduit finalement que S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty]$. En particulier, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a
$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{t^2+x^2}.$$
Intégrer cette inégalité entre n et $n+1$ donne la partie droite de l'inégalité précédente. Pour l'autre partie, on part de
$$\frac{x}{n^2+x^2} \geq \frac{x}{t^2+x^2} \text{ pour tout } t \in [n-1, n],$$
et on intègre cette inégalité entre $n-1$ et n.
3. Sommons les inégalités précédentes pour n allant de 1 à $+\infty$. On trouve :
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}dt.$$
Mais on peut calculer les intégrales, et on trouve que
$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq S(x) \leq \pi/2.$$
Si on fait tendre x vers $+\infty$, on trouve par le théorème d'encadrement des limites que $S(x)$ tend vers $\pi/2$.

Solution 26. On passe $f(x)/2$ de l'autre côté (terme pour $n = 1$), prendre x_0 qui réalise le max de f sur un certain segment $[0, a]$ avec $a < 1$, majorer $f(x_0)/2$ comme on l'imagine et constater qu'il y a égalité aux deux extrémités de la chaîne d'inégalités.
Donc pour tout $n \geq 2$, $f(x_0^n) = f(x_0)$ puis par passage à la limite, $f(0) = f(x_0)$ puisque $0 \leq x_0 < 1$.
On en déduit que $f(0)$ majore f sur chaque segment $[0, a]$ donc par continuité sur $[0, 1]$.
On fait la même chose pour vérifier que $\min(f) = f(0)$.