PROGRAMME DE LA COLLE N° 10

Semaine du 2/12/2024

Suites & séries de fonctions

- **Suites de fonctions** **▷ chapitre V & TD n° 5** :
  - — savoir montrer qu'une suite de fonctions converge simplement sur une partie I de $\mathbb{R}$;
  - — savoir montrer que la convergence est uniforme en utilisant le *sup* ;
  - — savoir montrer que la convergence n'est pas uniforme en utilisant le *sup* ou une suite de points $u_n \in I$ ou en raisonnant par l'absurde grâce aux théorèmes suivants ;
  - — la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue ;
  - — (intervertir $\lim\limits_{x\to a}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$) théorème de la double limite ;
  - — (intervertir $\int_a^b$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$ sur un segment $[a,b]$) si la convergence d'une suite de fonctions f_n continues est uniforme sur un segment $[a,b]$, alors on peut intervertir limite et intégrale, autrement dit la suite des réels $\int_a^b f_n(t)\,dt$ converge et sa limite vaut $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$;
  - — (intervertir $\int_I$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$ sur un intervalle I) théorème de la convergence dominée (l'intervalle I n'est pas nécessairement un segment et l'intégrale peut donc être impropre, les fonctions sont *cpm* et pas nécessairement continues, la convergence est simple et pas nécessairement uniforme mais on domine la suite de fonctions) ;
  - — théorème d'interversion de la dérivée $\frac{d}{dx}$ et de la limite $\lim\limits_{n\to\infty}$ & généralisation à une classe $\mathcal{C}^k$;
  - — continuité uniforme, théorème de Heine ;
  - — théorème d'approximation de Weierstrass.

- **Séries de fonctions** **▷ chapitre VII & TD n° 7** :
  - — savoir montrer qu'une série de fonctions converge simplement, uniformément voire normalement sur une partie I de $\mathbb{R}$;
  - — une série de fonctions converge uniformément *ssi* la suite des restes converge uniformément vers 0 (la fonction nulle) ;
  - — si une série de fonctions converge uniformément, alors la suite de fonctions converge uniformément vers 0 (la fonction nulle) ;
  - — la convergence uniforme sur un intervalle I préserve la continuité sur I ;
  - — (intervertir $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) théorème de la double limite ;
  - — (intervertir $\int$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) intégrer terme à terme grâce à un théorème où la série de fonctions converge uniformément sur un segment ~~& grâce à un théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque~~ ;
  - — ~~(intervertir $\dfrac{d}{dx}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) théorème de dérivation terme à terme & généralisation à une classe $\mathcal{C}^k$~~ ;
  - — ~~savoir utiliser ces théorèmes sur des intervalles plus restreints que I puis étendre la conclusion (si c'est une propriété locale) à l'intervalle I~~ ;
  - — savoir utiliser ces théorèmes pour montrer par l'absurde qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I.

Les méthodes et théorèmes barrés ne sont pas au programme de MPI mais sont au programme de MPI*.

À suivre : produits scalaires