Exercice 1 - Approximation par des polynômes (⋆⋆)

On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On considère alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\, dt = 0$$

1. Justifier qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

> Par définition f est continue sur un segment, dès lors on en déduit par le théorème d'approximation de Weierstrass l'existence d'une telle suite.

2. Démontrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt$$

> Comme $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, pour intervertir limite et intégrale sur un segment on recherche la convergence uniforme de $(P_n \times f)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f^2. Or on a pour $t \in [0,1]$:
>
> $$\left|P_n(t)\, f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)| \times |P_n(t) - f(t)| \leq \|f\|_\infty \times \|P_n - f\|_\infty$$
>
> Or f est continue sur $[0,1]$ donc bornée sur ce segment, et de plus la convergence uniforme de (P_n) vers f implique que la limite du membre de droite tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$. Comme on a majorée par une quantité indépendante de t on en déduit que la convergence uniforme désirée et donc la possibilité d'intervertir et le résultat.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

> On commence par calculer $\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt$, pour cela on considère que l'on peut écrire P_n sous la forme :
>
> $$P_n(X) = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$$
>
> D'où par linéarité de l'intégrale on trouve :
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} t^k\right) f(t)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \int_0^1 t^k f(t)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \times 0 = 0\end{aligned}$$
>
> Dès lors par passage à la limite et en utilisant la question précédente on en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\, dt = 0$. Comme f est continue f^2 l'est aussi, de plus il s'agit d'une fonction positive d'intégrale nulle, on peut alors affirmer que $f^2 = 0$ puis que $f = 0$.

Exercice 2 - Avec un paramètre (⋆⋆)

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

On remarque que l'on a $f_n(1) = 0$ et de plus pour $x \in [0,1[$, par croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on sait que $f_n(x)$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Pour étudier la convergence uniforme on dérive la fonctin f_n on trouve :

$$f_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}(n(1-x) - x)$$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\|f_n(x)\| &= \left|f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \\ &= n^a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\end{aligned}$$

En passant par l'exponentielle et le logarithme on trouve alors que :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

On en déduit que $\|f_n(x)\| \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}n^{a-1}$. Dès lors, (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $a < 1$.

Exercice 3 - Limite en $+\infty$ $(\star\star)$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. ON note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(\frac{nx}{n+1}\right)\end{array}$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ comme $\frac{nx}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et que f est continue on en déduit que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ d'où la convergence simple.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse f admet un limite finie en $+\infty$ que l'on note $l \in \mathbb{R}_+$, il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \left[\frac{A}{2}, +\infty\right[,\ |f(t) - l| \leq \varepsilon$$

On a de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[,\ \frac{n}{n+1}x \geq \frac{A}{2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[,\ \left|f\left(\frac{n}{n+1}x\right) - l\right| \leq \varepsilon$.

Enfin puisque $A \geq \frac{A}{2}$ on a aussi $\forall x \in [A, +\infty[\,,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - l| + |f(x) - l| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part puisque f est continue sur $[0, A]$ d'après le théorème de Heine elle y est uniformément continue. Autrement dit il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, A]\,,\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, A]$ on a $\left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{x}{n+1} \leq \frac{A}{n+1}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ai $\frac{A}{n+1} \leq \delta$. On dès lors :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0, A]\,,\ \left|\frac{n}{n+1}x - x\right| \leq \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

On obtient ainsi $\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et on en conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 - Monotonie (⋆⋆⋆)

Soit (f_n) une suite de fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ monotones, convergeant simplement vers f sur I. Démontrer que f est monotone.

Notons C l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que la fonction f_n soit croissante et on note de même D l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels la fonction est décroissante. Puisque chaque f_n est monotone on a $C \cup D = \mathbb{N}$ ainsi l'un au moins des deux est infini. Supposons sans perte de généralité que ce soit C. On considère alors une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\varphi(n)}$ soit croissante.

Soit donc $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a par croissante des $f_{\varphi(n)}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\varphi(n)}(x) \leq f_{\varphi(n)}(y)$$

Mais puisque (f_n) converge simplement vers f, la suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi simplement vers f. D'où $f_{\varphi(n)}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ mais aussi $f_{\varphi(n)}(y) \underset{n\to+\infty}{\to} f(y)$. Par passage à la limite dans l'inégalité on en déduit que $f(x) \leq f(y)$. Ceci montre alors que f est croissante.

Si D est infini, alors on montre que f est décroissante. Ainsi dans tous les cas f est monotone.
Remarque : Si C et D sont tout deux infinis, alors f est constante.

Exercice 5 - Appel téléphonique (⋆⋆)

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expérience indépendante et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

L'expérience consiste en n répétition d'une épreuve de Bernouilli de paramètre p, dès lors X compte le nombre de succès de ces épreuves, et donc X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   2.a. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer pour $k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k | X = i)$.

Soit $i \in [\![0,n]\!]$, sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$\mathbb{P}(Y=k|X=i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0,n-i]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. *Indication* : On pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et de plus :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k|X=i)$$

Ainsi d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-i-k} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k \\ &= \binom{n}{k} (p\,(2-p))^k (1-p)^{2n-2k} \\ &= \binom{n}{k} (p\,(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k} \end{aligned}$$

On remarque alors que $1-p\,(2-p) = 1-2p+p^2 = (1-p)^2$ et on peux alors en déduire que Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p\,(2-p))$.

2.c. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

On connaît l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, dans le cas de Z on obtient :

$$E[Z] = np\,(2-p)$$

Mais aussi :

$$V(Z) = np\,(2-p)\,(1-p)^2$$

Exercice 6 - Inclusion (⋆⋆)

Soit $E = [\![1,n]\!]$.

1. Quel est le nombre de couple $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$?

Pour fabriquer un tel couple il faut commencer par choisir un entier $k \in [\![1, n]\!]$ représentant le cardinal de A. Puis il faut choisir les k éléments formant l'ensemble A, et finalement il ne reste plus qu'à choisir une partie de $E \setminus A$ afin de former B, il y en a 2^{n-k}. Ainsi le cardinal recherché est :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$$

2. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on pioche une poignée de boules. Autrement dit on "pioche" une partie de E suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$, en particulier on peut ne rien piocher. Ensuite on remet les boules dans l'urne, et on effectue une deuxième pioche de la même manière. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun entre les deux pioches ?

Notons X la variable aléatoire renvoyant le résultat de la première pioche, et Y celle renvoyant le résultat de la deuxième pioche. On remarque alors que X et Y sont indépendantes, au vu de ce que l'énoncé suggère, et suive toutes les deux la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$, de plus on remarque que l'on cherche :

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \varnothing) = \mathbb{P}\big(X \subset \overline{Y}\big)$$

Comme X et Y sont i.i.d on en déduit à l'aide de la première question que :

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \varnothing) = \frac{3^n}{\left|\mathcal{P}(E)^2\right|} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Exercice 7 - Suite de jeux $(\star)$

Des joueurs $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ s'affront de la manière suivante : chaque manche oppose deux joueurs qui ont chacun une probabilité de gagner égale à $\frac{1}{2}$. La première manche oppose A_1à A_2, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le jouer A_{n+1}. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que la manche n ai lieu ?

Notons E_n l'évènement "la manche n a lieu". On a de façon immédiate $E_1 = 1 = E_2$. Ensuite pour $n \geq 2$ si la manche $n-1$ a lieu alors la probabilité que la manche n ai lieu également est $\frac{1}{2}$ (c'est la probabilité que le gagnant précédent l'emporte à nouveau). Autrement dit on a :

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1})$$

Ainsi par récurrence immédiate on trouve $\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.

2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

Notons à présent F_n l'évènement "le jeu s'arrête à la manche n". On a alors pour $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(E_n \setminus E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Et de plus $\mathbb{P}(F_1) = 0$, enfin comme les (F_n) sont incompatibles on en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

Ainsi le jeu s'arrête presque sûrement (avec probabilité 1).

3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Tout d'abord la probabilité que A_1 gagne est $\frac{1}{4}$ et de même pour A_2. Soit $n \geq 3$, A_n joue si, et seulement si, la manche $n-1$ a lieu. À partir du moment où A_n joue il a lui aussi $\frac{1}{4}$ chance de gagner, autrement dit :

$$\mathbb{P}(A_n \text{ gagne}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_n \text{ joue}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-1}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-3}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 8 - Indépendance impossible (⋆⋆)

On considère Ω un univers fini de cardinal p un nombre premier. On considère le modèle équiprobable pour les évènements de Ω. Montrer que A et B deux évènements non-triviaux (différents de $\varnothing$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

On raisonne par contraposée en supposant que l'on ai A et B deux évènements indépendants. On note a et b leurs cardinals respectifs. On a alors :

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= p \times \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= p \times \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ &= p \times \frac{a}{p} \times \frac{b}{p} \\ &= \frac{ab}{p} \end{aligned}$$

Or le cardinal de $A \cap B$ est un entier on en déduit donc que p divise ab, et donc par le théorème de Gauss p divise a ou b. Disons (sans perte de généralité) que p divise a. On a donc $a = kp$ les seuls possibilités sont donc $a = 0$ ou $a = p$, autrement dit $A = \varnothing$ ou $A = \Omega$. Par contraposée on a donc démontré que deux évènements non-triviaux ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 9 - Tombola (⋆⋆)

Dans une tombola 1000 billets sont mis en vente, dont 2 sont gagnant. Combien faut-il acheter de billets pour avoir au moins 1 chance sur 2 de gagner ?

On note n le nombre de billets que l'on achète et p_n la probabilité de l'évènement "au moins l'un d'entre eux est gagnant". Bien-sur on ne va pas calculer cette probabilité mais celle du contraire à savoir "tous les billets sont perdants".

Or il y a $\binom{n}{1000}$ choix de billets possibles et $\binom{n}{998}$ choix qui n'apporte aucun billets gagnant. On en déduit que :

$$p_n = 1 - \frac{\binom{n}{998}}{\binom{n}{1000}} = 1 - \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999}$$

On en déduit alors que l'on doit résoudre l'inéquation d'inconnue n :

$$\begin{aligned} p_n \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff n^2 - 1999n + 500 \times 999 \leq 0 \end{aligned}$$

En résolvant cette équation du degré 2 on trouve qu'il y a une racine entre 292 et 293 et une autre après 1000. Ainsi il faut acheter au moins 293 billets.
